

## К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ РЕЛЬЕФА

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

<sup>2</sup>Институт географии РАН, Москва, Россия

e-mail: xar4enkkoff@rambler.ru

Дан краткий обзор опыта применения гармонического анализа для морфометрической характеристики рельефа. Описаны некоторые ограничения использования аппарата дискретного преобразования Фурье (ДПФ) на топографических данных. Охарактеризована методика одномерного и двумерного преобразования Фурье топографических профилей и цифровых моделей рельефа, а именно ее математическая основа и конкретный алгоритм гармонического преобразования, реализованный в среде MathCAD. Одномерное ДПФ позволяет поставить ряду наблюдений в соответствие периодическую функцию как сумму волновых колебаний с кратными значениями частоты и периода. Для каждой такой гармоники определяются величины амплитуды и фазового сдвига. Амплитуда гармоники той или иной частоты характеризует ее вклад в колебания высот по линии профиля. Это позволяет сравнивать волны по значимости в “формировании” конкретного участка земной поверхности. Двумерное ДПФ, кроме того, позволяет выявить и направление колебаний. Идеальная фрактальная эрозионная система, в которой формы вреза разных порядков одинаково ранжируются как по ширине, так и по глубине, будет характеризоваться строгим убыванием амплитуд гармоник с увеличением их частот. Реальная земная поверхность редко проявляет такое свойство. Следовательно, преобразование Фурье может использоваться для задач классификации и районирования земной поверхности по ее гармоническим характеристикам, определяющим специфику топографического расчленения участка.

**Ключевые слова:** гармонический анализ, морфометрическая характеристика рельефа, преобразование Фурье, периодичность, амплитудный спектр.

### Введение

Разложение какого-либо “сигнала” на периодические разночастотные составляющие широко применяется в науках о Земле и смежных с ними дисциплинах (яркий пример – анализ приливов или речного стока). В геоморфологии гармонический анализ может использоваться при изучении как временных изменений рельефа [1], так и пространственной периодичности земной поверхности. В дополнение ко второму этот метод используется для аппроксимации и генерализации (фильтрации – filtering) цифровых моделей рельефа (ЦМР) [2–4]. Однако в настоящей работе внимание уделено:

1) дискретному преобразованию Фурье (самый распространенный метод гармонического анализа) высотных рядов и матриц по пространственным, но не временным координатам, т.е. выявлению пространственной периодичности;

2) морфометрической интерпретации результатов преобразования Фурье, но не использованию его для решения технической задачи аппроксимации или сглаживания топографических данных.

### Опыт использования гармонического анализа в морфометрических исследованиях

С названными ограничениями перечень публикаций, посвященных поднятой проблеме, относительно невелик. Использование метода преобразования Фурье для анализа структуры пространственных рядов и полей широко распространилось в геофизике в 50–60 гг. XX в. (в основном в изучении гравитационного и магнитного полей Земли), и лишь затем уже опробованные подходы были перенесены

на новый объект – поле высот земной поверхности [5–8]. Позже в разное время делались попытки гармонической характеристики рельефа поверхностей других планет – Марса [9, 10] и Венеры [10, 11], а также спутника Земли – Луны [12, 13]. При таком глобальном “размахе” требуется использование так называемых сферических гармоник для разложения на периодические функции циркумпланетарных профилей. Но известен и ряд работ, посвященных гармоническому анализу незамкнутых топографических профилей относительно небольшой протяженности: такой опыт описан для территории и дна акваторий США [14–18], бывшего СССР [19, 20], стран Европы [21, 22].

К задачам площадного анализа периодичности в рельефе применимо двумерное разложение Фурье. Этот метод активно использовался для описания рельефа в компьютерных центрах при ряде университетов и научных организаций еще в 60-х гг. XX в. [23–27], однако степень его доступности широкому кругу специалистов была невелика. С развитием персональной вычислительной техники и появлением специализированного класса программ, известных как “системы компьютерной алгебры” (MathCAD, Maple, Mathematica и др.), метод получил “второе рождение”. Появился ряд новых статей, посвященных в основном анализу рельефа разных участков на территории США [28–32] и некоторых других государств [33, 34].

Опубликован даже опыт использования преобразования Фурье для описания формы сечения кварцевых зерен и плановых контуров речных бассейнов [35, 36], формы речных меандров [37, 38] и т.д.

Отдельный интерес представляет доклад Дж. Гэлэнта и М. Хатчинсона [39, 40], в котором авторы в числе прочего излагают ограничения использования гармонического анализа для описания топографии территории. К перечню таких ограничений они относят:

1) подвергаемый гармоническому разложению “сигнал” (ряд или поле высот) должен быть стационарным, т.е. показатели среднего, дисперсии и статистические моменты более высоких порядков должны быть независимы от местоположения в ряду/поле. Топографические данные, по мнению этих исследователей, таким свойством в общем случае не обладают;

2) используемые в преобразовании Фурье синусоидальные функции слабо подходят для описания реального морфологического разнообразия топографических профилей и поверхностей;

3) не всегда возможно уверенно связать периодичность в устройстве топографической поверхности с рядом рельефообразующих факторов и плановым рисунком их распространения, т.к. иногда два и более фактора могут оказывать совместное влияние на возникновение “в рельефе” гармоник определенной частоты. И напротив – факторы могут противодействовать друг другу, не выражаясь в виде гармоник или выражаясь неявно.

Добавим еще одно ограничение: т.к. дискретное преобразование Фурье позволяет разложить “сигнал” на волны с фиксированными периодами, зависящими от длины профиля или ширины и длины участка, вполне возможна ситуация, когда не удастся “уловить” реально существующие волны максимальной амплитуды, и они будут учтены лишь как сумма более частых колебаний с меньшими амплитудами.

Как и любой другой метод, преобразование Фурье топографических данных имеет свои ограничения. Что, однако, не отменяет его возможной применимости к решению морфометрических задач. Тем более, что в некоторых классических работах [41, 42] приводятся сведения о волновой структуре участков земной поверхности, причем как на равнинах, так и в горах.

## Методика преобразования Фурье топографических профилей и ЦМР

Входными данными для ДПФ могут быть топографические профили, построенные по отметкам высот, взятых через равные интервалы в плане. Кроме того, анализироваться могут и отметки высот, снятые с топографической карты по регулярной сетке точек или, например, ЦМР в формате GRID. Учитывая все более широкое использование ЦМР в геоморфологии, следует рассчитывать, что именно гармонический анализ трехмерных топографических данных (двумерное разложение Фурье, гармоническая декомпозиция по двум плановым координатам) будет находить все более широкое применение.

Важно понимать, что одномерный случай разложения Фурье требует наличия данных, интуитивно относимых к двумерным, — точки топографического профиля, задаваемые двумя координатами (расстояние от начала профиля, высота). В свою очередь, двумерное разложение Фурье применимо к данным, относимым к трехмерным, — точки цифровой модели рельефа, задаваемые тремя координатами (например, широта, долгота и высота). Одномерное разложение Фурье на вход требует числовой вектор, промежутки между элементами которого принимаются заведомо равными. Двумерное разложение Фурье на вход принимает числовую матрицу, промежутки между элементами которой по строкам и столбцам также равны.

В общем виде одномерное дискретное преобразование Фурье [по 43] позволяет привести ряду наблюдений (отметок высот по профилю) длиной  $N$  в соответствие периодическую функцию:

$$Z(k) = \frac{A_0}{N} + \sum_{k=1}^N C_k \sin\left(k \frac{2\pi}{z} x + \theta_k\right), \quad (1)$$

где  $\frac{A_0}{N}$  — постоянная составляющая высоты по профилю;  $C_k$  — амплитуда  $k$ -ой гармоники;  $k \frac{2\pi}{z}$  — круговая частота;  $\theta_k$  — фазовый сдвиг  $k$ -ой гармоники.

Двумерное дискретное преобразование Фурье [по 44] позволяет привести матрицу наблюдений в соответствие периодическую функцию в комплексной форме:

$$Z(k_x, k_y) = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} (\alpha[m, n] - i\beta[m, n]) e^{2\pi i \left( \frac{k_x m}{N_x} + \frac{k_y n}{N_y} \right)}, \quad (2)$$

где  $k_x$  и  $k_y$  — номера гармоник в направлении вдоль строк и вдоль столбцов соответственно;  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты Фурье (амплитуды и фазовые сдвиги гармоник);  $m$  и  $n$  — индексы строк и столбцов в матрице.

Элемент матрицы  $Z(k_x, k_y)$  описывает [по 44] “волны” длиной:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}, \quad (3)$$

где  $f_x$  и  $f_y$  — частоты волн в направлении вдоль строк и вдоль столбцов матрицы.

Соответственно, при двумерном разложении каждая из гармоник характеризуется двумя величинами — частотой при движении вдоль строк (по широте) и частотой при движении вдоль столбцов (по долготе). Совпадают эти частоты только у гармоник, расположенных на главной диагонали комплексной матрицы, называемой также Фурье-образом по отношению к исходной ЦМР. Фурье-образ исходного набора данных — вектор или матрица такого же размера, элементы которого представлены комплексными числами.

**Пример дискретного преобразования Фурье топографического профиля из 8 точек (юго-западные склоны Среднерусской возвышенности; по данным GDEM2010 30'')**

№	$H_{\text{абс}}, \text{ м}$	Фурье-образ	Амплитуда, м	Фаза, °	Частота	Длина волны, м
1	249.6	1890	236.2	0	0	—
2	251.5	$50.356 + 0.757i$	6.30	0.86	0.125	$L^*$
3	239.9	$-4.435 - 36.368i$	4.58	-97.0	0.25	$L / 2$
4	215.8	$0.864 + 4.305i$	0.55	78.7	0.375	$L / 3$
5	224.0	35.725	1.70	0	0.5	$L / 4$
6	235.8	$0.864 - 4.305i$	0.55	-78.7	0.375	$L / 3$
7	238.1	$-4.435 + 36.368i$	4.58	97.0	0.25	$L / 2$
8	235.1	$50.356 - 0.757i$	6.30	-0.86	0.125	$L$

\*  $L$  — длина исходного профиля, м.

Поэтапно приложение преобразования Фурье к топографическим данным можно представить так: 1) подготовка данных для анализа, приведение их к “регулярному” виду — вектору из значений абс. высот точек, расположенных на фиксированном удалении каждой из них от предыдущей; матрице из значений абс. высот точек, расположенных в узлах квадратной сетки; 2) собственно одномерное или двумерное дискретное преобразование Фурье; 3) нахождение постоянной (средней) составляющей высоты по профилю или участку, это значение равно отношению первого элемента Фурье-образа (в матрице это левый верхний элемент) к общему количеству его элементов (т.е. к длине вектора или произведению числа строк и столбцов матрицы); 4) нахождение коэффициентов Фурье — амплитуд и фазовых сдвигов для всего набора гармоник с порядковыми номерами  $n$ : 1, 2 ...  $N/2$  и частотами, соответственно,  $(0.5 - (|n - (N/2)|/N))$ . Частота здесь — число “волн” синусоиды, приходящееся на единицу расстояния, т.е. на отрезок между двумя соседними точками, например, профиля; амплитуды — отношения модулей комплексных чисел Фурье-образа к общему количеству его элементов; фазовые сдвиги — мнимые аргументы комплексных чисел, выраженные в радианах (пример получаемых путем преобразования Фурье данных показан в табл. 1); 5) морфометрическая интерпретация результатов.

Геоморфологический смысл имеют, в первую очередь, показатели амплитуд гармоник в соотношении с их частотами. Так, при разном характере расчленения рядок гармоник, выстроенных по убыванию величины амплитуды, будет сильно различаться. Можно представить себе идеальную фрактальную эрозионную систему, когда формы разных порядков одинаково ранжируются и по расстоянию между водоразделами (длины волн в рельефе), и по глубине вреза (амплитуды волн в рельефе). В реальности при рассмотрении сколько-нибудь протяженных профилей или обширных ареалов это редко бывает так. Часто наиболее “длинные волны” в рельефе имеют меньшую амплитуду, чем более короткие — на первый план выходят вторая, третья или даже более высокочастотные гармоники.

В среде MathCAD нами был реализован алгоритм преобразования Фурье цифровых моделей рельефа или топографических профилей, также хранящихся в цифровом формате. По сути, топографический профиль в цифровом формате — лишь частный случай матрицы ЦМР с одним столбцом значений высот. На вход алгоритм принимает GRID-файл с расширением \*.asc (Arc/Info ASCII), начальные и конечные номера строк и столбцов для выборки необходимого участка из всей ЦМР, а на выходе выдает несколько моделей рельефа целевого участка, восстановленных по усеченным

Таблица 2

**Ячейки комплексной матрицы  
(и соответствующие им гармоники),  
учитываемые в восстановлении  
ЦМР различными способами**

<i>i/j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	2	2	2	1	1
2	1	1	1	2	2	2	1	1
3	1	1	1	2	2	2	1	1
4	2	2	2				2	2
5	2	2	2				2	2
6	2	2	2				2	2
7	1	1	1	2	2	2	1	1
8	1	1	1	2	2	2	1	1

Фурье-образам<sup>1</sup>, т.е. по параметрам: 1) первых и последних  $x$  гармоник (по элементам комплексной матрицы на пересечении строк с номерами  $i < x + 1$  и  $i > N - x + 1$  и столбцов с номерами  $j < x + 1$  и  $j > N - x + 1$ ); 2) всех элементов комплексной матрицы, принадлежащих строкам с номерами  $i < x + 1$ ,  $i > N - x + 1$  или столбцам с номерами  $j < x + 1$ ,  $j > N - x + 1$ ; 3) всех гармоник с амплитудой больше  $u$  вне зависимости от их частот (т.е. положения в Фурье-образе); а также из результатов: 4) самостоятельных разложений Фурье строк исходной ЦМР по параметрам первых и последних  $x$  гармоник (по элементам с номерами  $j < x + 1$  и  $j > N - x + 1$  отдельных комплексных векторов для каждой строки); 5) самостоятельных разложений Фурье столбцов исходной ЦМР по параметрам первых и последних  $x$  гармоник (по элементам с номерами  $i < x + 1$  и  $i > N - x + 1$  отдельных комплексных векторов для каждого столбца) и 6) как среднее арифметическое из результатов восстановления ЦМР отдельно по строкам и столбцам (пункты 4 и 5).

Каждый из шести подходов в зависимости от конкретных особенностей рельефа рассматриваемого участка, его площади, требований к точности разложения может оказываться более или менее эффективным, нежели остальные.

Для всех этих ЦМР усечение Фурье-образа перед обратным преобразованием в матрицу высот производится по одному из двух возможных параметров: 1) количество  $x$  рассматриваемых гармоник (первых и симметричных им, т.е. имеющих те же частоты, последних); 2) амплитудный ценз гармоник (рассматриваются только гармоники с амплитудой не менее  $u$  метров вне зависимости от их частот). Переменные  $x$  и  $u$  задаются пользователем по своему усмотрению.

Однако нужно понимать, что при длине двух векторов отметок высот, например, в 100 и 500 значений необходимое количество гармоник (параметр  $x$ ), с которыми оба исходные ряда восстановятся с одинаковой точностью, также отличаются примерно в 5 раз. Например, при сравнении исходного произвольно взятого нами ряда высот длиной 128 значений и восстановленного по 10 гармоникам с наименьшими частотами ряда этой же длины получен показатель среднеквадратической ошибки положения точек относительно линейной регрессии, равный 11.6 м. При удлинении ряда до 512 значений получен показатель среднеквадратической ошибки 34.6 м. Тем не менее, если использовать для восстановления ряда в 4 раза больше гармоник с наименьшими частотами (т.к. профиль удлинился тоже в 4 раза), получим показатель среднеквадратической ошибки 7.7 м.

Общее распределение в матрице учитываемых ячеек (и гармоник) демонстрирует табл. 2 (на примере матрицы  $8 \times 8$  элементов и  $x = 3$ ). Ячейки, обозначенные цифрой 1, учитываются при восстановлении ЦМР первым способом (см. пункт 1); цифрами 1 и 2 – при восстановлении ЦМР вторым способом (см. пункт 2).

То же самое касается параметра амплитудного ценза – восстановление рельефа участка по разреженной сетке допускает использование более высокого показателя. В то же время для восстановления очень детальной матрицы высот важны высокочастотные гармоники, пусть и с малыми амплитудами, следовательно, жесткого амплитудного ценза в этом случае быть не должно.

<sup>1</sup> Когда часть ячеек, выбранных по какому-то критерию, получает собственные значения, а остальные ячейки заполняются нулями, и только после этого делается обратное преобразование Фурье-образа в модель рельефа.

## Геоморфологически значимые результаты

Рассмотрим одномерное разложение Фурье на примере профиля между точками с координатами (53°06' с.ш., 37°21' в.д.) и (51°09.5' с.ш., 37°21' в.д.). По линии профиля через каждые 570 м взято 380 отсчетов абс. высоты (рис. 1). Профиль проложен в условиях расчлененной эрозионной равнины (Среднерусская возвышенность) с глубиной расчленения до 100 м и более. Величины амплитуд низкочастотных гармоник, описывающих этот профиль, указаны в табл. 3.

Таблица 3

**Параметры гармоник с 10 наименьшими частотами, описывающие экспериментальный топографический профиль**

Номер гармоники	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота (*1000)	2.63	5.26	7.89	10.5	13.2	15.8	18.4	21.1	23.7	26.3
Амплитуда, м	12.6	6.93	4.78	2.45	4.89	2.30	4.17	2.46	1.48	2.03
Ранг по амплитуде	1	2	4	11	3	13	5	10	20	14

Несмотря на общую закономерность для топографических данных об уменьшении амплитуд гармоник с увеличением их частоты (квазифрактальность рельефа), весьма часто на небольших по площади/протяженности участках и/или в небольших диапазонах частот это правило резко нарушается. В нашем примере амплитуды убывают последовательно только до 2-й гармоники включительно, а затем четкий тренд на убывание сменяется нечетким – третий ранг по амплитуде имеет уже 5-я гармоника, четвертый ранг – 3-я гармоника и т.д. Наибольший вклад в формирование имеющейся топографии вносят колебания 1-й гармоники, т.е. “волны” с периодом чуть более 216 км. Северная и южная четверти профиля в целом более возвышенны, чем средние две четверти (рис. 1). Это связано со вполне конкретной особенностью топографии по профилю – именно в его средней части находятся субмеридиональные отрезки рр. Сосна и Тим. То есть фактически северная и южная четверти профиля – это в основном междуречья, расчлененные низкопорядковыми водотоками, притоками рр. Сосна и Тим. В то время как средняя часть – это долины самих рек Сосна и Тим и низкие их водораздельные пространства. 5-я гармоника с периодом около 43 км описывает понижения речных долин уже отдельных притоков Сосны, например, р. Липовец. Добавление же 6-й и 7-й гармоник (соответственно периоды 36 и 31 км) позволяет

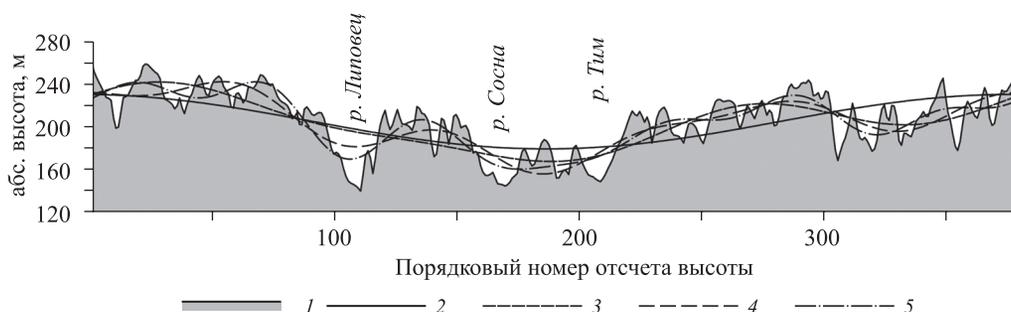


Рис. 1. Экспериментальный топографический профиль (Среднерусская возвышенность)

1 – профиль, 2 – первая гармоника, 3 – первые 3 гармоники, 4 – первые 5 гармоник, 5 – первые 7 гармоник

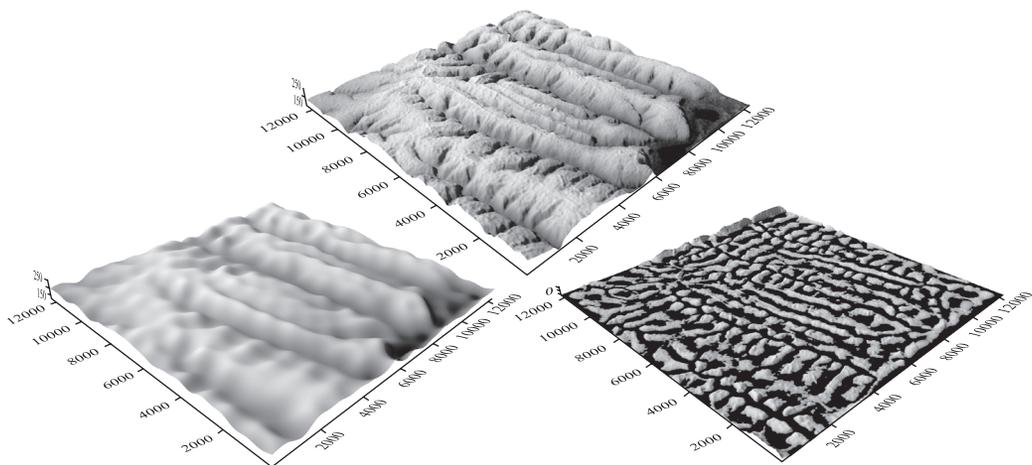


Рис. 2. Экспериментальный участок – фрагмент территории Курчатовского района Курской области: разложение ЦМР (вверху) на низкочастотную (слева) и высокочастотную (справа) составляющие. По данным SRTM 1"

описать уже относительно неглубоко врезанные долины верховьев речных систем или близко расположенные на профиле группы речных долин и крупных балок.

Таким образом, ряд амплитуд гармоник в соотношении с их частотами (а еще нагляднее – ряд рангов амплитуд) характеризует расчленение рельефа по линии профиля. Думается, внимательное рассмотрение таких рядов позволяет определять пространственные частоты наиболее значимых колебаний высот и проводить попытку их генетической интерпретации.

Преобразование Фурье в некотором смысле способно давать сходные результаты с тренд-анализом рельефа [45]. Это возможно, если за поверхность тренда (региональную составляющую поля высот) принять поверхность, восстанавливаемую по наиболее низкочастотным  $x$  гармоникам, а в качестве локальной составляющей взять остаточный “сигнал”. На рис. 2 в верхней части показано перспективное изображение рельефа (shaded relief map) участка территории Курчатовского района Курской области. Этот район в составе региона занимает одно из первых мест как по параметрам существующего расчленения земной поверхности, так и по показателям активности овражных процессов [46, 47]. Примерно в средней части район пересекается р. Сейм в субширотном направлении, правый борт долины которой прорезан густой сетью мощных субмеридиональных оврагов (рис. 2). Размеры рассматриваемого участка чуть более  $12 \times 12$  км, координаты его левого верхнего угла –  $51^{\circ}48.5'$  с.ш.,  $35^{\circ}30'$  в.д., правого нижнего –  $51^{\circ}41.8'$  с.ш.,  $35^{\circ}41'$  в.д.

На рис. 2 левое изображение показывает ЦМР, восстанавливаемую по 13 гармоникам наименьших частот (периоды от 12350 м до 950 м), а правое – разницу исходной матрицы высот и матрицы, восстановленной по 13 гармоникам. На левом изображении, следовательно, оставлены только наиболее значимые формы рельефа, а на правом – все то, что можно отнести к топографической шероховатости (topographic roughness [48]).

Амплитудный спектр двумерного преобразования Фурье рельефа экспериментального участка также имеет двумерный формат и выглядит следующим образом (рис. 3). Максимальное значение амплитуды характеризует 1-ую гармонику при движении вдоль столбцов и 0-ую (постоянная составляющая) при движении вдоль строк – 8.86 м. В то же время по причине большого размера матрицы (более 417 000 элементов) учесть все детали морфологии поверхности небольшим набором гармоник становится

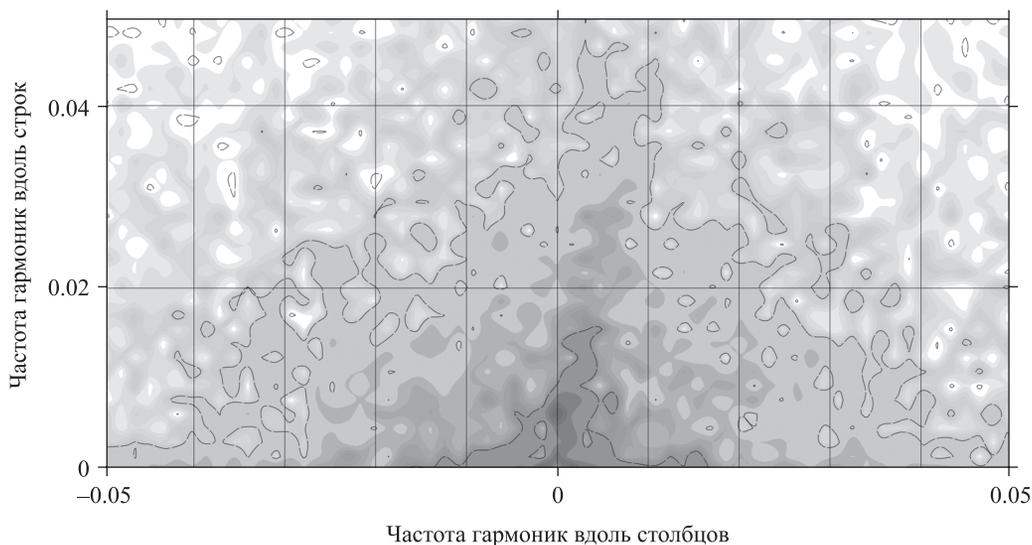


Рис. 3. Фрагмент амплитудного спектра двумерного разложения Фурье (в области низких частот) экспериментального участка. Показаны только неотрицательные частоты при движении по строкам, т.к. амплитудный спектр зеркально симметричен относительно точки с частотами (0;0). Чем ярче оттенок серого, тем больше амплитуда гармоники с данными частотами

невозможно. В результате, несмотря на относительно высокий максимальный показатель амплитуды, 99% гармоник не превосходят по этому параметру величину 4.3 см.

Наибольшие по амплитуде гармоники локализованы в области низких частот спектра: 1) на втором месте находится 4-я гармоника при движении вдоль строк и 0-я при движении вдоль столбцов. Период этой волны немногим менее 3100 м в направлении с запада на восток и бесконечно велик (постоянная составляющая) в направлении с севера на юг. Из рис. 2 очевидно, что эта гармоника определяет ширину и относительную высоту четырех крупных увалов, разделенных параллельными оврагами. Амплитуда этой гармоники близка к максимальному значению – 7.43 м; 2) на третьем месте с отставанием более чем 2 м по амплитуде (5.40 м) от предыдущей находится 1-я гармоника при движении вдоль строк и 0-я при движении вдоль столбцов. Связана она с тем, что третий с запада увал несколько ниже (на 10–15 м) всех прочих почти по всей своей длине. Эту особенность аппроксимирует волна с пиком в западной половине участка и подошвой, приходящейся именно на местоположение данного увала; 3) на четвертом и пятом местах 0-я гармоника при движении вдоль столбцов и 5-я и 3-я, соответственно, при движении вдоль строк, усложняющие характер субмеридионального расчленения участка; 4) только на шестом месте по величине амплитуды снова 0-я гармоника при движении вдоль строк и 2-я при движении вдоль столбцов. Это определенно свидетельствует в пользу того, что хотя генеральные колебания отметок высот ( $\pm 8.86$  м) и происходят здесь в направлении с севера на юг, важнейшие черты расчленения проявляются все-таки в направлении с запада на восток, где они имеют пространственные периоды 3100, 12350, 2470 и 4100 м.

Таким образом, преобразование Фурье позволяет формально определить значимость и направления колебательных составляющих поля высот с разной частотой.

## Выводы

1. Дискретное преобразование Фурье является мощным инструментом выявления пространственной периодичности в рельефе самых разных иерархических рангов – от планетарного до микрорельефа. Вместе с тем этот метод не свободен от ряда ограничений, первое из которых – нестационарность топографии в общем случае.

2. Геоморфологическая ценность дискретного преобразования Фурье заключается в том, что данный метод позволяет выявить из ряда/матрицы отметок высот периодические сигналы разных пространственных частот и сравнить их по значимости между собой. В идеальном случае, когда формы меньших размеров в плане имеют и меньшую относительную высоту/глубину, амплитуды выявленных гармоник будут строго убывать с увеличением их частоты. В действительности, для достаточно протяженных профилей или обширных ареалов порядок гармоник, выстроенных по убыванию амплитуды, может быть совершенно уникален. В этом случае одномерный или двумерный амплитудный спектр высот может рассматриваться в качестве строгого формального индикатора характера расчленения территории.

3. Сравнение векторов или матриц высот, отличающихся числом элементов, для двух и более участков земной поверхности влечет за собой масштабный эффект: в статистическом смысле для одинаково качественной аппроксимации двух векторов с длинами  $N$  и  $T \times N$  для второго вектора потребуется использование в  $T$  раз больше гармоник.

4. Гармонический анализ, помимо прочего, позволяет получать результаты, сходные с тренд-анализом поверхностей. Для этого в качестве региональной составляющей поля высот необходимо рассматривать поверхность, восстанавливаемую по короткому набору гармоник, например, наиболее низкочастотных. В качестве локальной составляющей в этом случае берется остаточный “сигнал”.

**Благодарность.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-17-10008).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Торнес Дж.Б., Брунден Д. Геоморфология и время. М.: Недра, 1981. 228 с.
2. Bassett K. and Chorley R.J. An experiment in terrain filtering // *Area*. 1971. No. 3. P. 78–91.
3. Pelletier J.D. Quantitative modeling of Earth surface processes. New York: Cambridge University Press, 2008. 325 p.
4. Florinsky I. Digital terrain analysis in soil science and geology. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2012. 379 p.
5. Peixoto J.P., Saltzman B., and Teweles S. Harmonic analysis of the topography along parallels of the Earth // *Journ. of Geophys. Res.* 1964. Vol. 69. No. 8. P. 1501–1505.
6. Lee W.H.K. and Kaula W.M. A spherical harmonic analysis of the Earth's topography // *Journ. of Geophys. Res.* 1967. Vol. 72. No. 2. P. 753–758.
7. Balmino G., Lambeck K., and Kaula W. A spherical harmonic analysis of the Earth's topography // *Journ. of Geophys. Res.* 1973. Vol. 78. No. 2. P. 478–481.
8. Rapp R.H. The decay of the spectrum of the gravitational potential and the topography of the Earth // *Geophysical Journ. Intern.* 1989. No. 99. P. 449–455.
9. Bills B.G. and Ferrari A.J. Mars topography harmonics and geophysical implications // *Journ. of Geophys. Research.* 1978. Vol. 83. No. B7. P. 3497–3508.
10. Balmino G. The spectra of the topography of the Earth, Venus and Mars // *Geophys. Research Letters.* 1993. Vol. 20. No. 11. P. 1063–1066.
11. Bills B.G. and Kobrick M. Venus topography: a harmonic analysis // *Journ. of Geophys. Res.* 1985. Vol. 90. No. B1. P. 827–836.
12. Rozema W.J. The use of spectral analysis in describing lunar surface roughness // USGS Professional Paper 650-D. Washington: US Govern. Printing Office, 1968. P. 180–188.
13. Bills B.G. A harmonic analysis of Lunar topography // *ICARUS.* 1977. No. 31. P. 244–259.
14. Stone R. and Dugundji J. A study of microrelief: its mapping, classification, and quantification by means of a Fourier analysis // *Engineering Geology.* 1965. No. 1. P. 89–187.
15. Nordin C.F. Statistical properties of dune profiles. USGS Prof. Paper 562-F. Washington: US Govern. Printing Office, 1971. 41 p.
16. Pike R.J. and Rozema W.J. Spectral analysis of landforms // *Annals of the Assoc. of American Geographers.* 1975. Vol. 65. No. 4. P. 499–516.
17. Fox C.G. and Hayes D.E. Quantitative methods for analyzing the roughness of the seafloor // *Reviews of Geophysics.* 1985. No. 23. P. 1–48.

18. *Chin A.* The periodic nature of step-pool mountain streams // *American Journ. of Science.* 2002. Vol. 302. P. 144–167.
19. *Бусалаев И.В.* Применение обобщенного гармонического анализа для характеристики рельефа земной поверхности водосборов // *Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства.* Вып. 2. Алма-Ата: Наука, 1964. С. 191–202.
20. *Ласточкин А.Н., Одесский И.А.* Гармонический анализ гипсометрических профилей с целью выявления волнообразных деформаций // *Геоморфология.* 1970. № 2. С. 78–88.
21. *Fredericksen P.* Terrain analysis and accuracy prediction by means of the Fourier transformation // *Photogrammetria.* 1981. No. 36. P. 145–157.
22. *Nimes C.R., Sarmento A.J.N.A., and O'Connor B.A.* Statistical description of sand waves in a submerged bank // *Transactions on the Built Environment.* 1995. Vol. 9. P. 257–264.
23. *Preston F.W. and Harbaugh J.W.* BALGOL program and geological applications for single and double Fourier series using IBM 7090/7094 computers. Kansas GS, Spectral Distribution Publication No. 24. Lawrence: Kansas GS, 1965. 72 p.
24. *Preston F.W.* Two-dimensional power spectra for classification of landforms // *Computer application in the Earth sciences: Colloquium on classification procedure (Kansas Computer Contribution No.7).* Lawrence: Kansas GS, Univ. of Kansas, 1966. P. 64–69.
25. *Krumbein W.C.* Classification of map surfaces based on the structure of polynomial and Fourier coefficient matrices // *Computer application in the Earth sciences: Colloquium on classification procedure (Kansas Computer Contribution No. 7).* Lawrence: Kansas GS, Univ. of Kansas, 1966. P. 12–18.
26. *Esler J.E. and Preston F.W.* FORTRAN IV program for the GE625 to compute the power spectrum of geological surfaces. Kansas Computer Contribution No. 16. Lawrence: Univ. of Kansas, 1967. 22 p.
27. *Rayner J.N.* Correlation between surfaces by spectral methods // *Computer application in the Earth sciences: Colloquium on trend analysis (Kansas Computer Contribution No. 12).* Lawrence: Kansas GS, Univ. of Kansas, 1967. P. 31–37.
28. *Clarke K.C.* Scale-Based Simulation of Topographic Relief // *The American Cartographer.* 1988. Vol. 15. No. 2. P. 173–181.
29. *Bruno G., Del Gaudio V., Mascia U., and Ruina G.* Numerical analysis of morphology in relation to coastline variations and karstic phenomena in the southeastern Mugre (Apulia, Italy) // *Geomorphology.* 1995. No. 12. P. 313–322.
30. *Harrison J.M. and Lo Ch.-P.* PC-based two-dimensional discrete Fourier transform programs for terrain analysis // *Computers & Geosciences.* 1996. Vol. 22. № 4. P. 419–424.
31. *Perron J.T., Kirchner J.W., and Dietrich W.E.* Spectral signatures of characteristic spatial scales and nonfractal structure in landscapes // *Journ. of Geophys. Research.* 2008. No. 113. P. 1–14.
32. *Booth A.M., Roering J.J., and Perron J.T.* Automated landslide mapping using spectral analysis and high-resolution topographic data: Puget Sound lowlands, Washington, and Portland Hills, Oregon // *Geomorphology.* 2009. No. 109. P. 132–147.
33. *Steyn D.G. and Aoyotte K.W.* Application of Two-Dimensional Terrain Height Spectra to Mesoscale Modeling // *Journ. of the Atmospheric Sc.* 1985. Vol. 42. No. 24. P. 2884–2887.
34. *Brook G.A. and Hanson M.* Double Fourier series analysis of cockpit and doline karst near Browns Town, Jamaica // *Physical Geography.* 1991. No. 12(1). P. 37–54.
35. *Jarvis R.S.* Classification of nested tributary basins in analysis of drainage basin shape // *Water Resources Research.* 1976. Vol. 12. No. 6. P. 1151–1164.
36. *Goudie A.* *Geomorphological techniques.* New York: Routledge, 1990. 709 p.
37. *Speight J.G.* Meander spectra of the Angabunga River // *Journ. of Hydrology.* 1965. No. 3. P. 1–15.
38. *Hooke J.M.* Changes in river meanders – a review of techniques and results of analyses // *Progress in Physical Geography.* 1984. No. 8(4). P. 473–508.
39. *Gallant J.C. and Hutchinson M.F.* Towards an understanding of landscape scale and structure // 3<sup>rd</sup> Intern. Conf./Workshop on Integrating GIS and Environmental Modeling (21–26 January 1996). Santa Fe: National Center for Geographic Information and Analysis, 1996. P. 412–418.
40. *Zhang J., Atkinson P., and Goodchild M.F.* *Scale in Spatial Information and Analysis.* Boca Raton: CRC Press, 2014. 367 p.
41. *Пенк В.* *Морфологический анализ.* М.: Географгиз, 1961. 360 с.
42. *Меццержков Ю.А.* *Структурная геоморфология равнинных стран.* М.: Наука, 1965. 390 с.
43. *Рыжов П.А., Гудков В.М.* *Применение математической статистики при разведке недр.* М.: Недра, 1966. 236 с.
44. *Rayner J.N.* The application of harmonic and spectral analysis to study of terrain // *Spatial Analysis in Geomorphology.* London: Methuen & Co Ltd., 1972. P. 283–302.

45. Берлянт А.М., Перминова В.Н. Разложение поверхностей на составляющие как метод структурно-геоморфологического анализа // Геоморфология. 1971. № 3. С. 78–86.
46. Скоморохов А.И. Скорость роста оврагов (по наблюдениям в Курской области) // Геоморфология. 1981. № 1. С. 97–103.
47. Щепилов В.Г. Исследование расчлененности территории Центральночерноземной зоны // Геоморфология. 1999. № 2. С. 66–71.
48. Taylor J., Siegert M.J., Payne A.J., and Hubbard B. Regional-scale bed roughness beneath ice masses: measurement and analysis // Computers & Geosciences. 2004. No. 30. P. 899–908.

Поступила в редакцию 02.05.2016

## APPLICATION OF HARMONIC ANALYSIS FOR THE QUANTITATIVE DESCRIPTION OF EARTH SURFACE TOPOGRAPHY

S.V. KHARCHENKO<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

<sup>2</sup>*Institute of Geography RAS, Moscow, Russia*

*e-mail: xar4enkkoff@rambler.ru*

### Summary

The paper is focused at perspectives of Discrete Fourier Transform (DFT) as a tool for morphometric studies. Characterized are the mathematical basics and MathCAD algorithm of one- and two-dimensional DFT when applied to topographical profiles and digital elevation models (DEMs). One-dimensional DFT allows to replace an empirical spatial series with a periodic function as a sum of waves with different frequencies and wavelengths. Amplitude of each wave describes the contribution of the corresponding frequency to the total elevation variations along the studied profile, which allows to compare different harmonics (waves of certain frequency) in terms of their importance in shaping the Earth surface. Two-dimensional DFT allows also to determine the direction of wave distribution. In an ideal fractal erosional system in which different-order thalwegs have equal ranking both by width and by depth of incision, strict decrease of harmonic amplitude with increasing spatial frequency would occur. However this feature is only rarely occurring in the real Earth surface. Consequently, the DFT method can be used for spatial classification and regionalization according to topographic patterns formally described by harmonic components of the Earth surface elevation.

**Keywords:** harmonic analysis, Earth surface morphometry, Fourier transform of topographic data, periodicity, amplitude spectra.

DOI: 10.15356/0435-4281-2017-2-14-24