УДК 551.4.012

Б. А. КАЗАНСКИЙ

РОЛЬ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОМОРФОЛОГИИ

Дифференциальное уравнение параболического типа, или уравнение диффузии, с помощью которого решается множество различных задач (в связи с чем существует и множество названий этого уравнения) многократно использовалось и в теоретической геоморфологии для описания эволюции рельефа [1—20], что дало Дж. Торнесу и Д. Брунсдену основание признать уравнение диффузии «составляющим основу математической геоморфологии» [4, с. 171].

Впервые к решению геоморфологических задач уравнение диффузии было применено в 1931 г. Ф. Экснером [1, 8] и с тех пор использовалось при моделировании и аналитическом исследовании развития продольного профиля реки [1, 9, 10], развития профиля склонов [1—7, 11—13], развития береговых линий [1, 14], смыва наносов и формирования стока в водосборах [15—17], для описания неровностей рельефа [18], при описании глобального рельефа [19, 20] и др. Наиболее обширный обзор решений диффузионных уравнений, применимых (потенциально) к решению задач геоморфологии, сделан У. Каллингом [5—7], работы которого, по оценке А. С. Девдариани, «по широте охвата, глубине и строгости решений следует признать на сегодняшний день лучшим примером применения аналитического метода в геоморфологии. Вместе с тем эта работа имеет недостаток, свойственный большинству аналитических решений геоморфологических задач, которые, не будучи подтверждены наблюдениями в природе или экспериментом, остаются пока только гипотезами» [1, с. 56]. Эта оценка остается справедливой и сейчас, 23 года спустя.

Использование уравнения диффузии в решении геоморфологических задач не случайно, так как для его вывода необходимо соблюдение только двух условий для описывающей рельеф функции F — условия неразрывности (литодинамического потока, например) и условия пропорциональности потока градиенту функции F [19—20]. Эти условия в принципе и используются при выводе уравнений, сводимых обычно к одномерному варианту. Но при выводе и использовании уравнения диффузии от внимания исследователей почему-то ускользнул ряд принципиальных моментов, на которые как раз следовало бы обратить внимание и которые объясняют низкую эффективность практического применения получаемых решений. Анализу этих принципиальных моментов и посвящена данная работа.

Так как «уравнение содержит производную по времени лишь первого порядка, решение уравнения диффузии необратимо во времени,... и уравнение диффузии *изображает возрастание энтропии.* Все это, грубо говоря, равносильно утверждению, что явления, изображаемые уравнением диффузии, имеют статистический характер» [21, с. 145], т. е. оно описывает те явления, которые имеют *стохастическую* природу и связаны с процессами выравнивания при необходимом переносе вещества и энергии. А между тем традиционно использование уравнения диффузии относят к аналитическому направлению математической геоморфологии, противопоставляемому стохастическому (статистическому, вероятностному) [1, 22, 23], и решения уравнения диффузии рассматриваются как детерминированные. Предложен даже термин — «детерминированная диффузия»,— который «служит для того, чтобы отличить такую диффузию от вероятностной диффузии» [4, с. 169]. Так что «основное уравнение математической геоморфологии» должно бы служить связующим звеном между аналитическими и стохастическими методами, на что мы обращали внимание еще в 1974 г. [19]; позднее к тому же пришли и Дж. Торнес с Д. Брунсденом, усматривающие, однако, в этом некоторую «тревожную» потерю определенности [4].

В уравнении диффузии (в собственном смысле), в простейшем (одномерном) случае имеющим вид:

$$\partial F/\partial t = D(\partial^2 F/\partial x^2) + ..., \qquad (1)$$

где многоточие обозначает возможные дополнительные члены, коэффициент диффузии D — величина строго положительная, а в уравнениях, полученных Ф. Экснером, Х. Эртелем, Дж. Торнесом и Д. Брунсденом и некоторых других, соответствующий коэффициент получился отрицательным. Так что, строго говоря, в геоморфологических задачах иногда получается не уравнение диффузии, а *сопряженное* ему уравнение; оба эти сопряженных уравнения называют прямым и обратным уравнениями, или уравнениями «вперед» и «назад» [24, с. 358] в том смысле, что уравнение с отрицательным коэффициентом переходит в уравнение с положительным коэффициентом при замене ∂t на $-\partial t$, т. е. при изменении направления отсчета времени на обратное. Таким образом, при отрицательном коэффициенте уравнения геоморфологические процессы описываются в «попятном» времени или, что равносильно, как процессы с *уменьшающейся энтропией.*

Попытки привлечь понятие энтропии в геоморфологию делались неоднократно [3, 4], исходя из 2-го начала термодинамики, согласно которому «при необратимых процессах... энтропия увеличивается с течением времени или, возможно, остается постоянной, но не может уменьшаться» [4, с. 199—200]. Но приведенная формулировка относится к процессам в *замкнутых* системах, тогда как геоморфологические системы являются *открытыми* самоорганизующимися системами, обменивающимися веществом и энергией с окружающей средой. В открытых системах законы классической термодинамики теряют силу. По признанию физиков, «хотя и естественно было предположить, что в процессе самоорганизации энтропия системы уменьшается, до недавнего времени это, однако, не было подтверждено расчетами и тем самым вопрос фактически оставался открытым» [25, с. 306].

Данные геоморфологии в принципе позволяли значительно раньше, чем в физике, прийти к «закону уменьшения энтропии», но авторитет физики всегда был столь высок, что наши доводы об уменьшении энтропии в геоморфологических процессах [19, 20] остались незамеченными. Доказать же, что при геоморфологических процессах энтропия может как возрастать, так и уменьшаться, можно очень просто, несмотря на отсутствие общепринятой энтропийной меры для этих процессов. Рассмотрим простую модель эволюции склона (которую можно описать уравнением диффузии) на рис. 1, где кривые (профили склона), аналитическое выражение которых пока несущественно, снабжены цифровыми индексами (параметр функций распределения, описывающих данную модель), соответствующими дискретным моментам времени («тонким временны́м срезам» — по [4]). Рисунок иллюстрирует сразу два геоморфологических процесса: в направлении возрастания индексов — модель аккумуляции на подводном склоне (именно такие профили, как с индексами 9—12, характерны, например, для подводного склона западного борта Татарского пролива вблизи мыса Золотой), в направлении уменьшения индексов — модель плоскостного смыва, где скорость смыва пропорциональна уклону (именно такие профили, как с индексами 6—2 получены Л. Мейером и Л. Крамером при моделировании [26]). Ясное дело, что если при одном из этих процессов энтропия растет, то при другом она уменьшается. Соответственно изменяется и направление отсчета времени (индексов кривых), что согласуется с известным отождествлением энтропии со «стрелой времени».

Геоморфологи чаще более геологи, чем физики или математики, поэтому их представления об эволюции рельефа ассоциируются с представлениями о геологической эволюции. Но с математической точки зрения, это совершенно различные процессы: при геологической эволюции (на «геоморфологическом этапе») происходит деградация (денудация, эрозия, выветривания и т. п.) геологи-

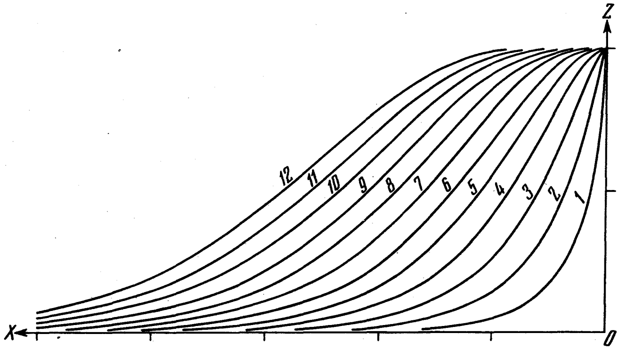

Рис. 1. Математическая модель склоновых процессов: осадконакопления (в направлении увеличения цифровых индексов кривых) и плоскостного смыва (в направлении уменьшения индексов)

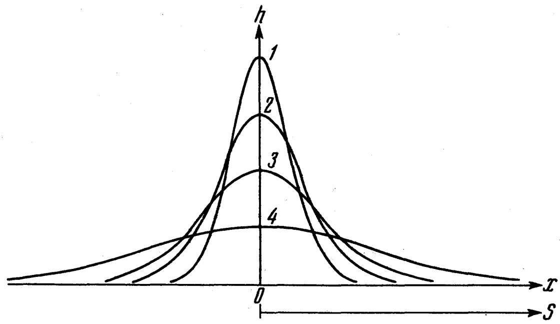

Рис. 2. Модель разрушения горного хребта по А. Шайдеггеру [3] для четырех последовательных моментов времени

ческих систем (тел) и в то же время самоорганизация (выработка равновесных форм) внешней границы этих тел, т. е. рельефа, который в уравнениях, описывающих геологическую эволюцию, будь таковые, выступал бы не как объект исследования, а как *граничное условие* в буквальном (математическом и геоморфологическом) смысле, поскольку рельеф может рассматриваться как «бестелесная» граница раздела двух сред (литосферы с атмосферой и гидросферой) «с как бы „бесцветной" и управляемой особыми законами и закономерностями пластикой» [27, с. 13]. Если ввести энтропийные характеристики геолого-геоморфологической эволюции, то геологической деградации должна соответствовать растущая энтропия (в полном соответствии со 2-м началом термодинамики или H-теоремой Больцмана), а геоморфологической самоорганизации при этом — уменьшающаяся энтропия (в соответствии с S-теоремой Ю. Л. Климонтовича), или же отсчет времени для геологических и геоморфологических процессов необходимо производить в противоположных направлениях.

Но «ход геоморфологических часов» и характер изменения энтропии определяются также выбором независимых и зависимых переменных в описании геоморфологических систем. Возьмем в качестве примера модель разрушения горного хребта, рассмотренную А. Шайдеггером [3], с поперечными профилями, показанными на рис. 2 для четырех последовательных моментов времени, описываемыми функцией нормального (гауссова) распределения

$$h(x) = (4\pi Dt)^{-1/2}\exp(-x^2/4Dt), \tag{2}$$

являющейся фундаментальным решением уравнения диффузии

$$\partial h/\partial t = D(\partial^2 h/\partial x^2). \tag{3}$$

Здесь высоты (h) являются функцией независимой переменной x — горизонтального расстояния от оси хребта, распределенного по нормальному закону с дисперсией $\sigma_x^2=2Dt$, растущей с увеличением времени t.

Гипсографические кривые, характеризующие рельеф того же горного хребта в те же моменты времени, графически совпадают с правыми ветвями графиков на рис. 2 и описываются формулой

$$S(h)=2|x|=2\sqrt{4Dt\cdot ln(1/4\pi Dt)}, \qquad (4)$$

где $S(h)$ — площадь горизонтального сечения хребта на высоте h. Функция распределения $S(h)$ обратна функции $h(x)$ и имеет дисперсию $\sigma_h^2=k/2Dt$ также обратную дисперсии распределения (2) и, следовательно, уменьшающуюся с увеличением t, что, собственно, было ясно и без вычислений.

С другой стороны, функцией, аналогичной (2), но от переменной h, описывается распределение глубин в океанах [19, 20], т. е.

$$S(h)=(\pi Dt)^{-1/2}\exp\cdot(-h^2/Dt). \qquad (5)$$

Батиграфическая функция океанов $S(h)$ удовлетворяет, естественно, уравнению диффузии

$$\partial S/\partial t=D(\partial^2 S/\partial h^2). \qquad (6)$$

Чтобы дисперсия высот рельефа дна океанов, равная $\sigma_h^2=Dt$, уменьшалась, время должно также уменьшаться, или же в батиграфической функции следует заменить t на $T-t$ (T — константа), тогда в уравнении (6) появится знак «минус» в одной из частей и уравнение «вперед» перейдет в уравнение «назад».

Все вышеприведенные примеры относятся к «зрелой» стадии развития рельефа, а как было показано ранее [19, 20], характер изменения энтропии различен на разных стадиях развития рельефа. Таким образом, изменение энтропии в геоморфологических процессах — явление более сложное, чем в классической термодинамике: характер изменения энтропии (рост, уменьшение, постоянство) зависит от стадии развития рельефа, от вида процесса (см. рис. 1), от выбора независимых пространственных координат и от выбора направления отсчета времени. Чтобы избавиться от порождаемой таким разнообразием условий неопределенности, необходимо дать строгое определение энтропии для геоморфологии.

Существуют два подхода к определению энтропии — термодинамическое (энергетическое, или больцмановское) и статистическое (информационное, или шенноновское). Для использования первого подхода в геоморфологии нужны обоснованные аналоги понятиям температуры и количества тепла; шенноновская же энтропия не зависит от физических предпосылок и определяется через плотность распределения $f(x)$ любых величин x формулой:

$$H=-\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)\log(f(x))dx, \qquad (7)$$

т. е. может быть применена как к распределению $h(x)$ в (2), так и к распределению $S(h)$ в (4) и (6), что опять-таки порождает неопределенность. Учитывая, что через гипсографическую (батиграфическую) функцию рельефа $S(h)$ определяются и такие вполне физические характеристики, как объем и энергия рельефа [19, 20, 28], есть смысл определять шенноновскую энтропию в геоморфологии именно через $S(h)$, назвав ее для однозначности *гипсографической* энтропией

$$H=-\int_{0}^{h_{max}} S(h)\log S(h)dh. \qquad (8)$$

При использовании такого определения энтропии основные физические характеристики рельефа континентов и океанов — площади гипсометрических

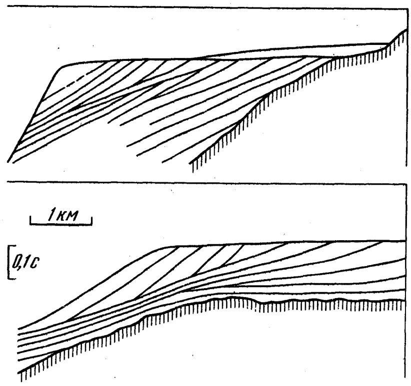

Рис. 3. Реальные профили подводных континентальных склонов и сейсмоотражающих границ в осадках в районе Португалии по данным [29]

ступеней S, энергия E и гипсографическая энтропия — оказываются взаимосвязанными уравнением [20]:

$$\partial S/\partial H=\partial^2 E/\partial h^2, \tag{9}$$

напоминающим уравнение диффузии, где энтропия выполняет роль временно́й координаты.

Итак, как показано выше, ряд аналитических выражений, «описывающих наиболее общие закономерности рельефа», действительно могут быть *представлены* как решения уравнения диффузии. Более того, легко доказывается, что решениями уравнения диффузии можно представить *любые* аналитические зависимости, отображаемые *функциями распределения,* каковыми описываются гипсографические, батиграфические кривые, профили склонов [28], продольные профили рек, а также распределения (в собственном смысле) любых геометрических, топологических или физических параметров рельефа (высот, уклонов, азимутов, площадей, длин, магнитуд, энергии и т. д.). Дело в том, что решениями уравнения диффузии являются функции распределения, а любые функции распределения сводимы одна к другой путем замены переменных, т. е. *любую* функцию распределения соответствующей подстановкой можно преобразовать к виду, например, нормального закона распределения (2) или (5) — фундаментальному решению уравнений диффузии (3) и (6). Но чем же тогда объяснить низкую эффективность практического использования уравнения диффузии в геоморфологии?

Геоморфологов интересуют так называемые равновесные, регулярные, устойчивые, выработанные и т. п. формы рельефа, а уравнение диффузии позволяет получить только одно тривиальное равновесное решение — при $t\to\infty$,— соответствующее полному выравниванию (пенепленизации) рельефа. Одно из фундаментальных положений геоморфологии заключается в том, что образование равновесных (и др.) форм рельефа *не зависит* от исходных форм, т. е. от начальных и граничных условий для уравнений, описывающих эволюцию рельефа. Или менее жестко: одинаковые равновесные формы рельефа могут получаться при разных начальных условиях (формах). Математически это означает, что уравнения должны бы давать *одинаковые* решения для *разных* начальных и граничных условий, что противоречило бы теоремам единственности, тогда как эволюция, описываемая уравнением диффузии, определяется раз и навсегда от $t=0$ до $t\to\infty$ и «весь круг геоморфологических проблем связан с выбором соответствующих граничных условий для решения уравнения диффузии» [4, с. 198]. Разумеется, что в природе нет столь стабильных (детерминированных) условий и реальное развитие рельефа идет не по «детерминированно диффузионной» схеме, как изображено на рис. 1, а по более сложным схемам, как, например, на рис. 3, где приведены типичные примеры сейсмических разрезов подводных континентальных склонов атлантического типа [29]. Сейсмические отражающие границы, показанные на рис. 3, соответствуют реальным профилям склонов для дискретных моментов времени («тонким временным срезам») и свидетельствуют об изменениях условий осадконакопления. Здесь мы имеем дело с явлением, которое в неравновесной термодинамике и синергетике называются бифуркацией, а в геоморфологии ей соответствует понятие критических рубежей или геоморфологических порогов — моментов, когда происходит резкая смена характера или скорости рельефообразующих процессов, возможная даже при незначительных изменениях внешних (граничных) условий [30, 31]. «В принципе, бифуркация есть не что иное, как возникновение при некотором критическом значении параметра нового решения уравнений» [32, с. 118]. По Дж. Торнесу, наличие характерных внутренних порогов «приводит нас к идее дифференцированной восприимчивости ландшафтов к изменению внешних агентов в зависимости от того, насколько близко система подошла к пороговому состоянию» [31, с. 229].

Математический аппарат для описания поведения самоорганизующихся систем в точках бифуркации и вблизи этих точек в настоящее время успешно разрабатывается в неравновесной термодинамике и в синергетике. Термодинамический подход дает возможность обнаружения неустойчивостей (порогов, бифуркаций), а в синергетическом подходе исследуются явления, происходящие в этих точках, и определяется состояние системы за порогом. По мнению И. Пригожина, «математическая теория бифуркаций очень сложна» [32, с. 114], но, поскольку «сфера интересов и основного внимания в геоморфологии смещается от наблюдений состояний равновесия самих по себе к признанию множественности устойчивых и неустойчивых состояний равновесия, бифуркаций, разделяющих эти состояния, и траекторий, соединяющих эти состояния» [31, с. 234], геоморфологам придется осваивать эти сложные разделы математики, где уравнению диффузии отводится скромная вспомогательная роль.

Из проделанного обзора следует вывод, что уравнение диффузии исчерпало практически свои возможности в качестве «основного уравнения математической геоморфологии», позволив смоделировать некоторые идеализированные характеристики процессов рельефообразования, выяснить геоморфологический смысл понятий энтропии и времени в этих процессах и наметить путь дальнейшего развития математической геоморфологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Девдариани А. С.* Итоги науки. Геоморфология. Вып. 1. Математические методы. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1966. 142 с.
2. *Девдариани А. С.* Математический анализ в геоморфологии. М.: Недра, 1967. 155 с.
3. *Шайдеггер А.* Теоретическая геоморфология. М.: Прогресс, 1964. 450 с.
4. *Торнес Дж. Б., Брунсден Д.* Геоморфология и время. М.: Недра, 1981. 228 с.
5. *Culling W. E. H.* Analytical theory of erosion // J. Geol. 1960. V. 68. № 3. P. 336—344.
6. *Culling W. E. H.* Soil creep and the development of hillside slopes // J. Geol. 1963. V. 71. № 2. P. 127—161.
7. *Culling W. E. H.* Theory of erosion on soil-covered slopes // J. Geol. 1965. V. 73. № 2. P. 230—254.
8. *Exner F. M.* Zur Dynamik der Bewegungsformen auf der Erdoberfläche // Ergebnisse d. Kosmischen Physik. Gerlands Beiträge zur Geophysil. 1931. Supbd. 1. S. 373—445.
9. *Великанов М. А.* Русловый процесс (основы теории). М.: Физматгиз, 1958. 395 с.
10. *Ertel J.* Flüssbett Deformation burch Akkumulation und Erosion // Monatsber. Deutsche Akad. Wiss. Berlin, 1963. B. 5. № 11—12. S. 682—683.
11. *Есин Н. В., Дмитриев В. Д.* Эрозионное воздействие капель дождя и некоторые закономерности эволюции склонов // Геоморфология. 1975. № 4. С. 68—73.
12. *Hirano M.* A mathematical model of slope development — an approach to the analytical theory of erosional topography // J. Geosci. Osaka City Univ. 1968. V. 11. № 2. P. 13—52.
13. *Hirano M.* Quantitative morphometry of fault scarp with reference to the Hira Mountains, Central Japan // Jap. J. Geol. and Geograph. 1972. V. 42. № 1—4. P. 85—100.
14. *Pelnard-Considère R.* Essai de theorie de l'evolution des formes de rivage en plage de sable et de galets // Soc. Hydrotech. France, IV journées de l'hydraulique. 1956. V. 3. № 1. P. 1—10.
15. *Бусалаев И. В.* Применение стохастических дифференциальных уравнений в геоморфологии // Геоморфология. 1967. № 1. С. 100—106.
16. *Moore R. J., Clarke R. T.* A distribution function approach to rainfall-runoff modelling // Water Resour. Res. 1981. V. 17. № 5. P. 1367—1382.

17. *Moore R. J., Clarke R. T.* A distribution function approach to modelling basin sediment yield // J. Hydrol. 1983. V. 65. № 1—3. P. 239—257.
18. *Блинов И. А., Саманего Х. Г., Цветков М. В.* Метод математического моделирования неоднородного рельефа дна моря // Методы и технические средства морской навигации. М., 1968. С. 131—133.
19. *Казанский Б. А.* Применение энергетического принципа к решению некоторых задач геоморфологии: Автореф. дис... канд. геогр. наук. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1974. 28 с.
20. *Казанский Б. А.* О применимости концепции энтропии в геоморфологии // Вопросы геоморфологии и четвертичной геологии юга Дальнего Востока СССР. Владивосток, 1975. С. 63—66.
21. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 800 с.
22. *Борсук О. А., Спасская И. И.* Математические методы в геоморфологии // Теоретические и общие вопросы географии. Т. 1. М., 1974. С. 65—152.
23. *Пиотровский В. В.* Третье совещание по математическим методам в геоморфологии // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1965. № 1. С. 141—147.
24. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972. 376 с.
25. *Климонтович Ю. Л.* Послесловие редактора перевода книги И. Пригожина «От существующего к возникающему». М.: Наука, 1985. С. 283—312.
26. *Mayer L. D., Kramer L. A.* Erosion equations predict land slope development // J. Agricult. Enginiering. 1969. № 50. P. 1—19.
27. *Флоренсов Н. А.* Очерки структурной геоморфологии. М.: Наука, 1978. 240 с.
28. *Казанский Б. А.* Теоретические предпосылки и методика математического анализа профилей склонов // Геоморфологические исследования активных океанических окраин. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1986. С. 62—78.
29. *Mongenot D., Vanney J. R.* Geomorphologie et profis de reflexion sismique: interpretation des surfaces remerquabled d'une plateforme continentale // Ann. Inst. Oceanogr. Paris, 1980. V. 56(S). P. 85—100.
30. *Грегори К.* География и географы. Физическая география. М.: Прогресс, 1988. 384 с.
31. *Thornes J. B.* Evolutionary geomorphology // Geography. 1983. V. 68. № 3. P. 225—235.
32. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. Время и сложность в физических науках. М.: Наука, 1985. 328 с.

Тихоокеанский институт
географии ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
12.X.1988

DIFFUSION EQUATION IN MATHEMATICAL GEOMORPHOLOGY

KAZANSKY B. A.

Summary

Solutions of diffusion equations which describe pattern of the relief evolution have been analysed and an ambiguity is shown to be present in the basic definitions of the enthropy and time direction in geomorphic processes. To exclude the ambiguity it is suggested to deduce the enthropy of geomorphic systems from their hypsographic functions (i. e. functions of height distribution). When concerning the real evolution of the relief with many states of equilibrium and non-equilibrium, possibilities of the process description using diffusion equations are shown to be limited. The necessity is emphasized to use more complex mathematical technique of the dymanic systems theory.