

ДМИТРИЕВ В. А., ЕСИН Н. В.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ АБРАЗИОННО-ДЕНУДАЦИОННОГО БЕРЕГА

Надводный береговой обрыв, или клиф, в подавляющем большинстве случаев представляет собой достаточно крутую, иногда почти вертикальную поверхность. Высота клифа может достигать сотен метров. Его поверхность разрушается под воздействием факторов денудации, а основание подрезается абразией. В связи с таким механизмом разрушения некоторые берега (например, северо-восточного сектора Черного моря) получили название абразионно-денудационных.

Обломочный материал, поступающий на пляж с поверхности разрушающегося клифа, оказывает влияние на скорость абразии [1, 2], а через нее и на интенсивность денудации (чем больше уклон клифа, тем интенсивнее денудация). Таким образом, скорости абразии и денудации оказываются взаимозависимыми. Некоторые качественные закономерности абразионно-денудационного процесса рассмотрены авторами ранее [3]. Математическая модель, описывающая этот процесс, предложена А. М. Трофимовым и В. М. Московкиным [4]. Однако они не рассматривают воздействие на береговой склон обломочного материала. В процессах же подобного типа благодаря ему осуществляется обратная отрицательная связь, поддерживающая некоторый средний темп отступления берега [1]. В настоящей статье предлагается достаточно простая модель, описывающая эволюцию клифа под воздействием абразии и денудации, учитывающая их взаимное влияние друг на друга.

Сечение поверхности клифа вертикальной плоскостью, перпендикулярной к берегу, в большинстве случаев представляет собой линию, очень близкую к прямой. Поэтому в случае плоской задачи клиф будем аппроксимировать прямой АВ, наклоненной к плоскости горизонта под углом φ (рис. 1). В целях упрощения анализа будем полагать, что высота клифа не меняется вдоль оси ОХ.

В результате действия абразии и денудации клиф АВ изменяет свое положение на плоскости. При этом абразия, подрезая основание клифа, тем самым увеличивает его уклон. Денудация же выполаживает клиф, делает его более пологим. Поэтому со временем формируется такой уклон клифа, при котором абразия и денудация взаимно уравниваются [3]. Сопоставим модель такого процесса.

Из треугольника АВС находим

$$AC = L = H \operatorname{ctg} \varphi$$

или, продифференцировав по времени t ,

$$\frac{dL}{dt} = -V = -\frac{H}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_a, \quad (1)$$

где V — скорость абразии, $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_a$ — мгновенная угловая скорость вращения линии АВ в результате перемещения основания клифа. Из (1) находим

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_a = VH^{-1} \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

Будем полагать, как это принято в теоретической геоморфологии [5], что интенсивность денудации пропорциональна крутизне склона. На основании этого запишем

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_g = -\frac{1}{\tau} \operatorname{tg} \varphi, \quad (3)$$

где $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_g$ — угловая скорость вращения клифа в результате действия

факторов денудации, τ — некоторый коэффициент, характеризующий устойчивость к денудации пород клифа, имеющий размерность (год). Более подробно его физический смысл будет обсуждаться ниже.

Вращение клифа АВ представляет собой сумму вращений под действием абразии и денудации. Сложив (2) и (3), получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{H} \sin^2 \varphi - \frac{1}{\tau} \operatorname{tg} \varphi. \quad (4)$$

Запишем теперь уравнение баланса обломочного материала на пляже (аналог уравнения, взятого из работы [6]):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{H_a}{2} \left(V + \frac{H}{\tau \sin \varphi \cos \varphi} \right) - AVW + Q. \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое в правой части представляет собой объем материала, поступившего в единицу времени с клифа. Второе слагаемое характеризует объем материала, потерянного в результате истирания, третье — объем материала неабразионного происхождения (выносы рек, искусственная подсыпка и др.), поступившего на пляж. W — объем обломочного материала на единице длины берега, m^3/m , a — доля пляжеобразующего материала в породах клифа, A — коэффициент, зависящий от прочности породы и волнового режима.

При прочих равных условиях скорость абразии V зависит от объема обломочного материала на пляже [1, 2, 7]. Эта зависимость в наиболее общем виде записывается так [6]:

$$\frac{dX}{dt} = V = B \frac{W + \varepsilon}{(W + r)^2}, \quad (6)$$

где B , ε , r — некоторые коэффициенты, характеризующие абразию конкретного участка берега.

Таким образом, для описания изучаемого процесса составлена система трех дифференциальных уравнений (4) — (6) с тремя неизвестными φ , W , X . Проведем вначале некоторые теоретические исследования.

Рассмотрим вопрос о том, как изменяется поверхность клифа под действием только денудации. Этот процесс описывает уравнение (3). Его решение имеет вид

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right), \quad (7)$$

где φ_0 — начальный угол наклона клифа. Отсюда видно, что интенсивность денудации снижается во времени по экспоненте. Коэффициент τ определяет, таким образом, время, необходимое для того, чтобы исходное значение величины $\sin \varphi_0$ уменьшилось в e раз.

Рассмотренная задача имеет непосредственное отношение к проблеме укрепления абразионных берегов. Нами [2] показано, что одним из способов укрепления многих участков берега северо-восточного сектора Черного моря является изъятие с пляжа обломочного материала, который во много раз усиливает абразионное воздействие волн (породы здесь настолько прочные, что волны сами по себе их не разрушают). В этом случае решение (7) показывает, как будет изменяться уклон клифа, если обломочный материал, поставляемый на пляж денудацией, регулярно убирать из береговой зоны. Нетрудно рассчитать по уравнению (5) и объем поступающего в результате денудации обломочного материала, что необходимо для перспективного планирования берегозащитных мероприятий.

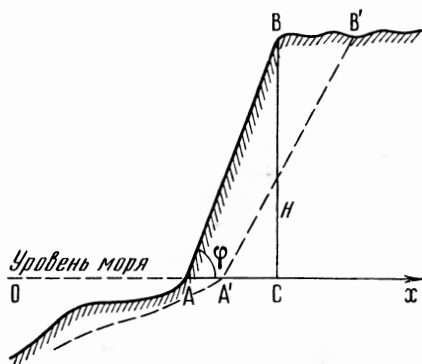


Рис. 1. Схема эволюции клифа AB и A'B' — соответственно положение клифа в момент t и t'

Некоторые важные особенности изучаемого процесса могут быть выявлены при исследовании на устойчивость решений уравнений (4) — (6), когда правые части этих уравнений принимают значения, близкие к нулю.

Особый интерес представляет анализ проведения решений системы уравнений (4) — (6), когда одновременно у двух уравнений обращаются в нуль правые части. Например, если $\varphi \rightarrow 0$ и $W \rightarrow 0$, то

$$\frac{d\varphi}{dt} \rightarrow 0, \quad \frac{dW}{dt} \rightarrow \infty, \quad \frac{dX}{dt} \rightarrow 0.$$

Такое состояние берегового откоса можно охарактеризовать как устойчивое с неограниченным ростом объема пляжа и уменьшением наклона клифа. Это пример перехода абразионного процесса в аккумулятивный в результате поступления в береговую зону большого объема обломочного материала. Такая ситуация возникает при $\tau < \frac{2H}{V}$. Если $\tau \geq \frac{2H}{V}$, то угол наклона клифа во времени возрастает до некоторого значения $\frac{\pi}{2} > \varphi^* > \frac{\pi}{4}$ и после этого процесс стабилизируется. Используя критерий Рауса — Гурвица, нетрудно показать, что возможны два состояния системы, соответствующие стадиям динамической стабилизации ($\frac{d\varphi}{dt} = 0$ и $\frac{dW}{dt} = 0$):

$$\varphi_1^* = \frac{1}{2} \text{Arc sin} \left(\frac{2H}{V^* \tau} \right) \quad \text{и} \quad \varphi_2^* = \frac{\pi}{2} - \varphi_1^*.$$

где

$$V_1^* = \frac{AB(H_a + \varepsilon A)}{(H_a + rA)^2}$$

Случаю $\varphi = \varphi_1^*$ соответствует неустойчивое состояние системы. При незначительных флуктуациях берег становится либо аккумулятивным (при $\Delta W > 0$), либо абразионным ($\Delta W < 0$). Соотношение $\varphi = \varphi_2^*$ характеризует устойчивое состояние абразионно-денудационного берега, при котором угол наклона клифа всегда больше 45° . При незначительных флуктуациях W процесс всегда переходит во времени в стадию динамического равновесия.

По предложенной модели выполнены расчеты эволюции клифа для двух достаточно хорошо изученных участков побережья Черного моря: один из них характеризуется интенсивной (мыс Бурнас), другой — слабой (северо-восточное побережье) абразией.

В расчетах для северо-восточного побережья мы принимаем [2]: $B = 0,04$ м/год, $\varepsilon = 0,0025$ м³/м, $r = 1$ м³/м, $A = 10$ м³/м · год, $H = 50$ м, $a = 0,3$, $\tau = 5 \cdot 10^4$ лет. Это соответствует абразии с максимальной скоростью отступления берега 1 см/год. За год истирается примерно 10% пляжевого материала. Начальные условия принимались такими: при $t = 0$, $X = 0$, $W = 5$ м³/м, $\varphi_0 = 9^\circ$, $18-81^\circ$. Результаты расчетов представлены на рис. 2. Они показали следующее. В течение первых десятков лет пляжевый материал от исходного значения (5 м³/м) уменьшается до величины 0,8 м³/м, а затем, по мере приближения уклона к динамически устойчивому состоянию, увеличивается до 1,2 м³/м (таков, кстати, порядок реального объема обломочного материала на данном берегу). В этом, как бы сбалансированном, состоянии с берега поступает такой же объем материала, какой истирается в прибойной зоне.

Величина отступления берега и скорость абразии в области устойчивого решения практически не зависят от исходного уклона клифа. Во времени $V \rightarrow \text{const}$. Угол φ во времени также стремится к постоянному значению φ_2^* (на рис. 2 $\varphi_2^* = 82^\circ$). Критическое значение φ_1^* , разделяющее зоны устойчивых решений, здесь составляет примерно 15° .

Расчеты для мыса Бурнас приведены по данным работы [7]. Абразионному процессу, протекающему там, соответствуют следующие значения

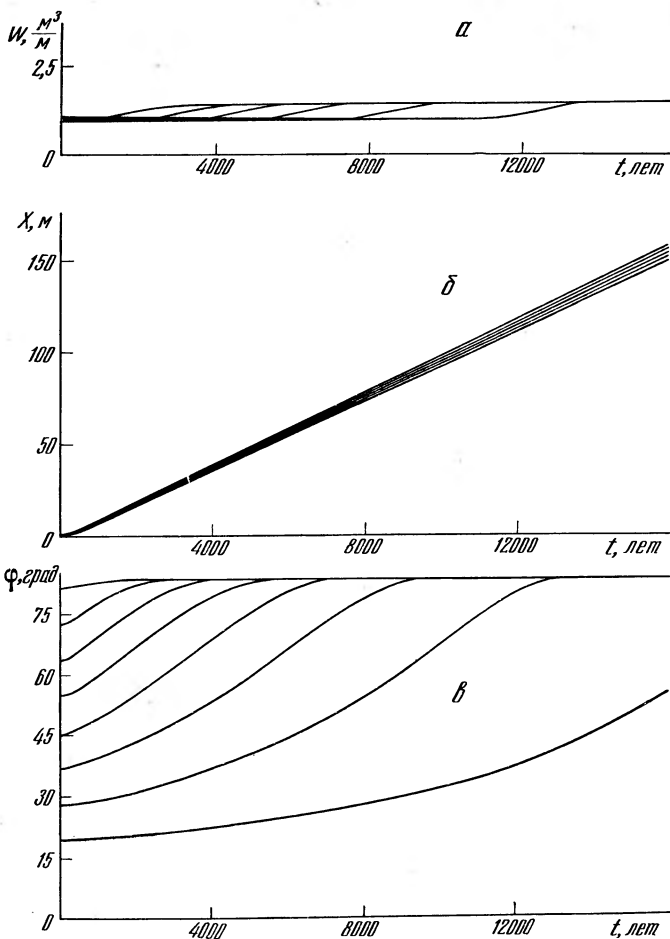


Рис. 2. Эволюция абразионно-денудационных берегов северо-восточного сектора Черного моря по модели (4), (5), (7) Изменение во времени: *a* — объема обломочного материала, *б* — величины отступления берега, *в* — угла наклона клифа

параметров: $B=40$ м/год, $\varepsilon=1$ м³/год, $r=3$ м³/м, $A=60$ м³/м·год, $H=15$ м, $a=0,02$, $\tau=50$ лет. Результаты расчета представлены на рис. 3. Объем обломочного материала на пляже в стадии динамического равновесия составляет примерно 11 м³/м, что несколько больше его реального объема (10,4 м³/м — [7]). Основные закономерности процесса здесь те же, что и в предыдущем случае, но иной временной масштаб. Расчеты показали, что если исходный уклон клифа мал, то объем обломочного материала, поступающего в результате денудации, может быть так велик, что берег из абразионного становится аккумулятивным. Реально это соответствует случаю, когда берег сложен легкоразрушаемыми суглинками, содержащими большой процент песка. У берегов, сложенных прочными породами, склоны зарастают, что резко снижает интенсивность денудации. Здесь, при малой исходной крутизне склона, формируется новый клиф. Такой же результат возможен при усилении абразии. Если клиф достаточно высок, он не может быстро отреагировать на изменившиеся условия увеличением уклона всей своей поверхности. В таком случае у основания формируется как бы новый клиф, более крутой, чем исходный. Уклон клифа у основания здесь значительно больше, чем в его верхней части. Теория показывает, что если интенсивность абразии не уменьшится, то со временем уклон всего клифа увеличится до его уклона в нижней части.

Рассмотрен вопрос о зависимости скорости абразии от интенсивности денудации. Для этого в расчетах значение τ варьировалось в определен-

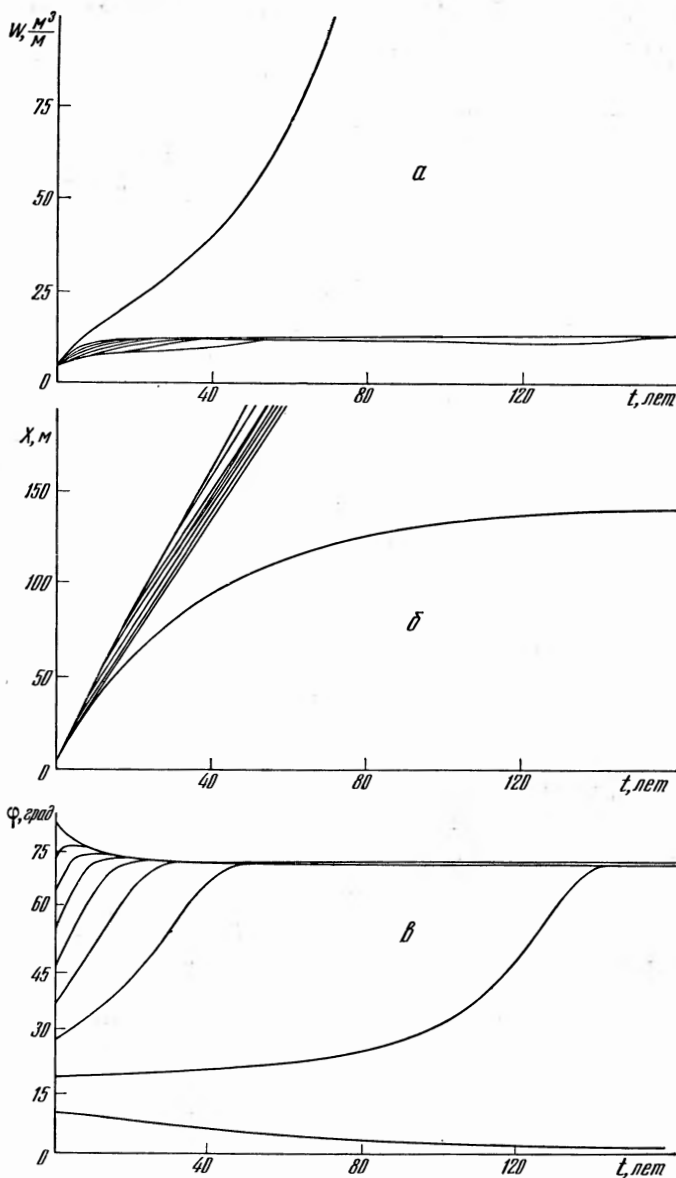


Рис. 3. Эволюция абразионно-денудационных берегов района мыса Бурнас
Усл. обозн. см. рис. 2

ных пределах при прочих одинаковых параметрах. Расчеты выполнены для указанных выше типов берегов. Применительно к условиям мыса Бурнас τ варьировалась в пределах от 20 до 100 лет (через 10 лет). Оказалось, что при малых τ (слабой устойчивости пород по отношению к денудации) абразионный берег довольно быстро становится аккумулятивным. При $\tau > 40$ лет этого не происходит, берег все время развивается как абразионный. Но в такой ситуации величина его отступления (а следовательно, и скорость абразии) практически не зависит от τ . Этот же результат получен и для северо-восточных берегов Черного моря. Он показывает, что в обоих случаях ведущим (определяющим) является абразия, а денудация в целом приспосабливается к скорости абразии. При этом от τ зависит время перехода процесса из начального состояния в стадию динамического равновесия — чем больше τ , тем меньше это время. На переходном этапе V очень слабо зависит от τ .

На побережье северо-восточного сектора Черного моря имеется ряд участков (например, возле пос. Архипо-Осиповка), где породы в значительно большей степени подвержены денудации, чем на соседних участках. Казалось бы, что и скорость абразии здесь должна быть больше. Однако ни наши многолетние натурные наблюдения за абразией [2], ни геометрия береговой линии не показывают этого.

Остановимся теперь на вопросе определения τ . В данной работе он решен таким образом. Для указанных типов берегов составлены номограммы зависимости угла φ_2^* в стадии динамического равновесия от τ и H по уравнению (4). По ним для конкретного участка берега по высоте клифа и его уклону определялось значение τ . При этом предполагалось, что в настоящее время процесс находится в стадии динамического равновесия.

В заключение отметим следующее. Как показали расчеты, абразионно-денудационный процесс, так же как и абразионный [1], из начального состояния со временем переходит в стадию динамического равновесия, которая характеризуется неизменностью скоростей абразии и денудации. Этот процесс устойчив относительно внешних воздействий. Роль обратной отрицательной связи здесь играет обломочный материал. Это позволяет использовать его как инструмент управления интенсивностью абразии. Предлагаемая теория открывает, таким образом, новые возможности защиты абразионных берегов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Есин Н. В. О роли обломочного материала в абразионном процессе//Океанология. 1980. № 1. С. 111—115.
2. Есин Н. В., Савин М. Т., Жилиев А. П. Абразионный процесс на морском берегу. Л.: Гидрометеониздат. 1980. 200 с.
3. Есин Н. В., Савин М. Т. О влиянии высоты клифа и интенсивности денудации на абразионный процесс//Геолого-геофизические исследования зоны предокеана. М., 1980. С. 119—124.
4. Трофимов А. М., Московкин В. М. Математическое моделирование в геоморфологии склонов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983. 220 с.
5. Девдариани А. С. Математический анализ в геоморфологии. М.: Недра, 1967. 160 с.
6. Есин Н. В., Дмитриев В. А., Московкин В. М. Математическая модель эволюции береговой линии абразионного берега//Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 1. С. 223—226.
7. Шуйский Ю. Д., Шевченко В. Я. Динамика берегов Черного моря в районе мыса Бурнас//Геоморфология. 1975. № 4. С. 98—104.

Южное отделение
Ин-та океанологии АН СССР

Поступила в редакцию
27.X.1986

MATHEMATIC MODEL OF SEA COAST EVOLUTION DUE TO MARINE EROSION AND DENUDATION

DMITRIEV V. A., ESIN N. V.

Summary

A two-dimensional problem of the cliff surface evolution is considered taking into account the marine abrasion and denudation processes. The evolution is described using a set of three differential equations. When analysed the equations revealed the existence of two regime of the marine erosion and denudation process, one of the regime being unstable. Occasional increase in debris supply to the beach may cause the transition from erosional to accumulative type of coast. Numerical solutions of the equations are obtained which describe the cliff evolution at two sites of the Black Sea coast. A technique of the erosion coefficient calculation is introduced, field observations data being used in the calculations.