ГЕОМОРФОЛОГИЯ

№ 1 январь — март 1972

МЕТОДИКА НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 551.437

И. В. БУСАЛАЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГЕОМОРФОЛОГИИ

Высказываются соображения о возможности использования стохастических уравнений в геоморфологии. Сформулирована математическая модель эрозионного развития рельефа водосборов, позволяющая изучить эволюцию гипсометрической кривой бассейна. В основу положена гипотеза В. Г. Глушкова о том, что интенсивность эрозии пропорциональна полной энергии стока. Предполагается, что денудационный процесс является дельта-корреляционным случайным процессом, используется уравнение А. Н. Колмогорова.

В порядке постановки вопроса предлагается одна из простейших математических моделей, позволяющая проследить трансформацию гипсометрической кривой водосбора в процессе его развития.

Исходя из того, что интенсивность эрозии пропорциональна полной энергии стока с поверхности бассейна, выводится дифференциальное уравнение денудации орографической фигуры бассейна. Решение этого уравнения в принципе должно дать функцию распределения высотных ступеней водосбора (гипсометрической кривой) в любой момент времени, которая, однако, будет зависеть от нашего предположения относительно характера случайного процесса, воздействующего на систему.

Есть некоторые основания полагать, что указанное воздействие является случайным процессом с некоррелированными приращениями и, следовательно, плотность распределения вероятности высот удовлетворяет прямому уравнению А. Н. Колмогорова. Подставив в последнее коэффициенты интенсивности процесса, определенные из стохастического уравнения (3), легко найти плотности переходных вероятностей, а также кривую распределения высот для предельного равновесного случая.

Стохастические дифференциальные уравнения и некоторые приемы их решения. В соответствии с существующими представлениями о циклах развития рельефа изменение высот земной поверхности в простейшем случае можно описать одним или системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dH_i}{dt} = g_i(H_i) + \varphi_i(H_i, t\xi_i(t)). \tag{A}$$

В правую часть этих уравнений входят обобщенные координаты и обобщенные силы.

Физический смысл указанного уравнения можно пояснить следующим образом. Изменение высоты рельефа под действием денудационных факторов пропорционально некоторой функции от высоты[1] $g_i(H_i)$, к которой следует прибавить случайную добавку, зависящую как от высоты, так и от местных условий.

[1] Зависимость интенсивности денудации от высоты согласуется с концепцией геоморфологических уровней К. К. Маркова (1948).

Ввиду громадной сложности геофизических процессов, формирующих рельеф, и их слабой изученности примем воздействующие силы $\xi(t)$ случайными величинами, а сами уравнения стохастическими. Они определяют процесс лишь в вероятностном смысле с точностью до закона распределения вероятностей. Следовательно, решение может быть получено лишь в форме кривой распределения характеристик процесса.

Методы решения и анализа указанных уравнений во многом зависят от свойств случайных функций, входящих в систему, и от интенсивности их взаимодействия с параметрами описываемого объекта. В этом смысле целесообразно различать слабые и сильные взаимодействия. Совершенно ясно, что они зависят не только от мощности агентов эрозии, но и от прочности пород. Пестрота распределения горных пород, а также неравномерность атмосферных и гидравлических воздействий обусловливают флуктуационный разброс и возникновение того или иного типа стохастического процесса в динамической системе.

Существенным фактором является также соотношение времени корреляции случайной функции τ_k с инерционной постоянной системы τ_c.

При выборе метода анализа и решения стохастических дифференциальных уравнений различают несколько случаев.

1. **Слабые взаимодействия.** Такого рода денудационные взаимодействия можно наблюдать в странах с засушливым климатом, где воздействия водной эрозии незначительны вследствие малого количества осадков. В этом случае для нахождения статистических характеристик на выходе системы применим метод линеаризации, позволяющий сравнительно легко получить средние значения и корреляционные функции процесса. Однако этим способом не удается найти функцию распределения за исключением заведомо гауссовских процессов.

2. **Интенсивные взаимодействия.** Способы анализа интенсивных случайных взаимодействий существенно зависят от соотношения τ_k и τ_c.

а) При случайных воздействиях с широким спектром и при $\tau_c \gg \tau_k$ может быть эффективно использован аппарат марковских процессов, связанных с дифференциальными уравнениями Фоккера — Планка — Колмогорова. Использование последних позволяет в принципе найти как переходные, так и стационарную функции распределения. В этом заключается одно из преимуществ указанного метода. Однако реализация его практически не всегда возможна вследствие вычислительных трудностей. Некоторые затруднения возникают также при наличии в правой части уравнения (А) разрывных функций или производных от воздействующих сил (инерционные системы). В этом случае применяется метод статистической линеаризации, который заключается в том, что исходная система заменяется статистически эквивалентной линейной.

б) При $\tau_k \gg \tau_c$ часто становится возможным в первом приближении пренебречь производной во времени и удовлетвориться квазистатическим решением $g(H) = \varphi(H, t, \xi(t))$. В других случаях, например при анализе инерционных систем, полезно воспользоваться методом усреднения.

в) Наиболее сложным является, однако, случай, когда $\tau_k \approx \tau_c$. Здесь для решения используются функциональные представления Вольтерра системы нелинейных дифференциальных уравнений (Тихонов, 1957).

Численные методы решения стохастических уравнений.

а) Метод статистических испытаний (Монте-Карло) применяется по следующей схеме: разыгрывается последовательность случайных величин ξ_i, входящих в правую часть уравнений (А), затем полученные величины ξ_i подставляются в правую часть уравнения; последние интегрируются аналитически или с помощью какого-либо численного метода. В результате многократного повторения указанной процедуры получается N вариантов решений, по которым и определяются необходимые статистические характеристики. Изложенный метод отличается простотой и наглядностью, однако существенным его недостатком является слабая сходимость (порядка $\frac{1}{\sqrt{N}}$), что требует больших затрат машинного времени для достижения приемлемой точности.

б) Интерполяционный метод (Чернецкий, 1968) является более точным и эффективным. Он не требует организации выборки случайных величин. Решение предлагается строить в специально рассчитанных для соответствующих законов распределения узлах, по стандартным формулам. Вследствие этого достигается значительное сокращение вычислительной работы.

Покажем на примере развития денудации водосбора реки особенности применения некоторых из этих методов.

Вывод стохастического дифференциального уравнения денудации водосбора. Осадки, выпавшие на поверхность водосбора, обладают определенным запасом потенциальной энергии, которая пропорциональна высоте их выпадения относительно какого-либо базиса и их массе:

$$dЭ = uHdF \ т/М,$$

где dF — площадь участка в $м^2$, H и u — соответственно высота и слой осадков в метрах.

Достаточно теперь просуммировать энергию всех элементарных участков в пределах данного водосбора, чтобы убедиться в пропорциональности ее объему массива, слагающего территорию бассейна в целом, считая от базисного уровня:

$$Э = u\int\limits_F HdF = uV.$$

Если далее перейти непосредственно к энергии стока (вместо слоя осадков u взять сомножителем слой стока m), то мы получим потенциальную гидравлическую энергию бассейна.

В. Г. Глушков (1934) предположил, что интенсивность денудации водосборов пропорциональна полной энергии стока:

$$\frac{dV}{dt} = -DЭ = -DmV. \qquad (1)$$

Здесь V — объем массива (объем орографической фигуры по М. А. Мосткову, 1950), D — коэффициент денудации, dt — единица времени, равная году. Знак минус в формуле отражает тот факт, что процесс денудации приводит к уменьшению массива водосбора.

Нетрудно убедиться, что выражение (1) представляет собой уравнение «макроскопической динамики» (т. е., по сути дела, является феноменологическим уравнением процесса). Для этого запишем правую часть уравнения в эквивалентном виде

$$\frac{d(F_0H_{ср})}{dt} = \frac{F_0dH_{ср}}{dt} = -DmV = -\Phi(H_{ср}, t), \qquad (1а)$$

где F_0 — площадь основания орографической фигуры бассейна, (при денудации она принимается постоянной), $H_{ср}$ — средняя высота в момент времени t.

Таким образом, соотношение (1а), а следовательно, и (1), отражают средние суммарные эффекты и являются, по сути дела, статистически осредненными. Из (1а) следует, что соотношение для актуальных (неосредненных) высот должно отличаться только слагаемым, среднее значение которого равно нулю (поскольку в макропроцессе флуктуации взаимно погашаются):

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{F_0}\Phi(H,t) + \frac{1}{F_0}\xi(H,t),\ \overline{\xi(H,t)} = 0.$$

Приведенные соображения полезны для понимания следующего шага в преобразовании соотношения (1); для вывода последующих формул они не используются.

Преобразуем уравнение (1), придавая ему вероятностную интерпретацию. Субстанциональная производная $\frac{dV}{dt}$ в левой части (1), если в качестве переменных взять высоту массива (ступени гипсометрической кривой) и время (рисунок), может быть раскрыта следующим образом:

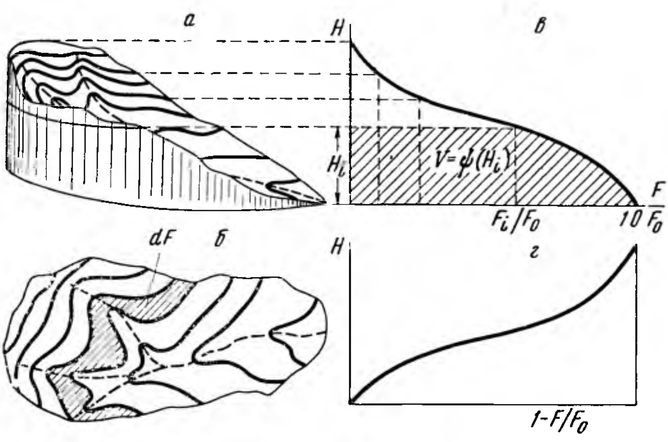
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial H}\frac{dH}{dt} = -DmV. \tag{2}$$

Решив это выражение относительно производной по времени от высоты, получим

$$\frac{dH}{dt} = -Dmg(H) + \varphi(H)\,\xi(t), \tag{3}$$

где $g(H) = V \Big/ \frac{\partial V}{\partial H}$, $\varphi(H)\cdot\xi(t) = \frac{\partial V}{\partial t}\Big/\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{1}{m}\frac{\partial Э}{\partial t}\Big/\frac{\partial V}{\partial H}$.

Дифференциальное уравнение (3) является по своему смыслу стохастическим, поскольку интенсивность эрозии в разные моменты времени представляет собой процесс, зависящий от целого ряда причин



К выводу уравнения денудации водосбора:

а — орографическая кривая бассейна; *б* — водосборная площадь бассейна; *в* — гипсометрическая кривая высот бассейна; *г* — кривая распределения вероятностей высот

(сопротивление горных пород, экспозиция склонов, задернованность, тектонические движения, изменения погоды и пр.).

Процесс денудации водосбора в горных условиях большей частью протекает по типу сильных взаимодействий, причем здесь среднее время изменения высоты τ_c (инерционная постоянная системы) значительно больше, чем время корреляции τ_k случайных воздействий. Это легко понять, поскольку, прежде чем уменьшится высота водосбора необходимо нарушить (частой сменой воздействий) крепость горных пород, разрушить их поверхность и вынести обломочный материал вниз за пределы водосбора.

Следовательно, как указывалось в первом параграфе, в этом случае колебания высот рельефа водосбора во времени описываются марковским процессом, а плотность вероятности высот удовлетворяет прямому уравнению А. Н. Колмогорова (1938) [2]:

$$\frac{\partial f(H,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial H}[K_1(H,t)f(H,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial H^2}[K_2(H,t)f(H,t)], \tag{4}$$

где $f(H,t)$ — плотность вероятности в момент времени t и, следовательно,

$$f(H,t) \geqslant 0, \quad \int_0^{H_{\max}} f(x,t)\,dx = 1.$$

В качестве начального условия может быть принята какая-либо плотность вероятности $f_0(H,t_0)$ или же дельта — распределение, если начальное значение единственно $\delta(H-H_0)$.

Уравнение (4) полностью определяется коэффициентами K_1 и K_2, а также начальными и граничными условиями. В качестве последних можно принять $f(H_{\max}, t) = f(O, t) = 0$, что означает практическую невозможность для высоты выйти за пределы минимального и максимального значения высот данного бассейна.

Коэффициенты K_1 и K_2, представляющие собой условное математическое ожидание приращения процесса (средняя скорость изменения высоты) и условную дисперсию (разброс относительно средней скорости), соответственно определяются из уравнения (3) по формулам [3]:

$$K_1(H,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\Delta H)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{(H_{\Delta t} - H)}}{\Delta t}, \tag{5а}$$

$$K_2(H,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\Delta H)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{(H_{\Delta t} - H)^2}}{\Delta t}, \tag{5б}$$

Для этого находим приращение процесса описываемого уравнением (3) за интервал Δt:

$$\Delta H(t) = -q/H_{\text{ср}} mg(H,t)\,\Delta t + \varphi(H,t)\int_t^{t+\Delta t} \xi(t)\,dt,$$

и по соотношению (5а) подсчитываем математическое ожидание полученного выражения.

Отсюда $K_1 = -q/H_{\text{ср}} mg(H)$ (так как под знаком интеграла стоит процесс с дельта-корреляцией и со средним равным нулю — белый шум).

Аналогично по формуле (5б) определяем второй коэффициент

$$K_2 = \lim \frac{1}{\Delta t \to 0} M\Big\{[q/H_{\text{ср}} mg(H,t)]^2 - 2q/H_{\text{ср}} mg(H,t) \times$$

$$\times \varphi(H,t)\int_t^{t+\Delta t} \xi(t)\,dt + \varphi^2(H)\int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \xi(x)\,\xi(y)\,dx\,dy\Big\} = N_0\varphi^2(H).$$

---

[2] Отметим, что Шайдеггер (Scheidegger, Langbein, 1966) указал на возможность моделирования развития склонов марковским процессом, удовлетворяющим уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова.

[3] При этом значение процесса в момент t, равное H, предполагается фиксированным.

Следовательно, в нашем случае коэффициенты K_1 и K_2 приобретают вид

$$K_1(H,t) = Dmg(H) = \frac{q}{H_{\text{ср}}} mg(H),\ K_2(H,t) = N_0\varphi^2(H), \tag{5в}$$

где коэффициент денудации D расшифровывается В. Г. Глушковым как частное от деления средней мутности стока q на среднюю высоту орографической фигуры $H_{\text{ср}}$; N_0 — интенсивность спектральной плотности белого шума процесса $\xi(t)$,

$$N_0 = 2\int_0^\infty \xi(t)\,\xi(t+\Delta t)\,d\Delta t = 2\int_0^\infty \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)\,d\tau.$$

В случае стационарности марковского процесса коэффициенты $K_1(H, t)$ и $K_2(H, t)$, а также плотность вероятности f не зависят от времени и от начального распределения $\frac{\partial f(H,t)}{\partial t} = 0$, и, следовательно, уравнение (4) преобразуется в линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $f(H)$:

$$\frac{d}{dH}[K_2(H) f(H)] - 2K_1(H) f(H) = 0,$$

которое, очевидно, соответствует достаточно развитым речным бассейнам.

Общий интеграл его дается формулой

$$f(H) = \frac{C}{K_2(H)} \exp\left[2\int_0^H \frac{K_1(x)}{K_2(x)}\,dx\right]. \tag{6}$$

Подставив коэффициенты (5в) в формулу (6), получим выражение для определения плотности распределения высот рельефа водосбора:

$$f(H) = \frac{C}{N_0\varphi^2(H)} \exp\left[\frac{2m}{N_0}\int_0^H \frac{-q/H_{\text{ср}}g(x)}{\varphi^2(x)}\,dx\right], \tag{7}$$

где C — постоянная нормировки.

Характерно, что в формулу (7) входит ряд гидродинамических параметров и, таким образом, открывается путь физического анализа динамики рельефа водосборов. Что касается решений нестационарного уравнения (4), то оно осуществимо лишь в некоторых частных случаях, когда коэффициенты K_1 и K_2 имеют достаточно простой вид. Например, при линейной зависимости их от высоты мы приходим к семейству кривых К. Пирсона (Колмогоров, 1938).

Обобщенное стохастическое дифференциальное уравнение эрозионного развития речного бассейна. Предложенная выше модель водосбора, по-видимому, может дать удовлетворительное описание только для сравнительно небольших бассейнов со сравнительно мало изменяющимися условиями увлажнения (постоянство модуля стока), горными породами, мутностью и пр. Поэтому большие бассейны необходимо рассматривать как совокупность бассейнов более низкого порядка.

Применяя к последним аналогичные рассуждения и переходя к безразмерным координатам $W = \frac{V}{V_0}$, $h = \frac{H}{H_0}$, получим систему стохастических дифференциальных уравнений:

$$\frac{dh_i}{dt} = -D_i m_i g_i(h_i) + \varphi_i(h_i)\,\xi(t),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

В результате мы приходим к многомерному уравнению А. Н. Колмогорова:

$$\frac{\partial f(h_1, \ldots, h_n, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial h_i} [K_i(h_1, \ldots, h_n) f(h_1, \ldots, h_n, t)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ij}^{n} \frac{\partial^2}{\partial h_i \partial h_j} [K_{ij}(h_1, \ldots, h_n) f(h_1, \ldots, h_n, t)]. \qquad (8)$$

Коэффициенты здесь определяются формулами:

$$K_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{(h_{i\Delta t} - h_i)}}{\Delta t},$$

$$K_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{(h_{i\Delta t} - h_i)(h_{j\Delta t} - h_j)}}{\Delta t}.$$

Многомерное уравнение даже в предположении стационарности в общем виде не решается, оно может быть решено лишь для частных типов функций g_i и φ_i.

Для численного решения уравнения (8), по-видимому, можно использовать какую-либо из процедур Монте-Карло.

Гипотезы, положенные в основу вывода стохастических уравнений водосбора, разумеется, не являются единственно возможными. Должны быть исследованы и другие возможные решения. Лучшим будет то из них, которое дает наибольшее приближение к натурным данным. Эти данные необходимо будет получить экспериментальным путем.

ЛИТЕРАТУРА

Глушков В. Г. Работа стока и денудация.— В сб.: За рационализацию гидрологии. Одесса, 1934.

Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей.— Успехи матем. наук, 1938, вып. 5.

Марков К. К. Основные проблемы геоморфологии. М., Географгиз, 1948.

Мостков М. А. Об исчислении запасов гидравлической энергии.— Изв. АН СССР ОТН, М., 1950, № 6.

Тихонов В. И. Анализ и синтез нелинейных систем при случайных воздействиях.— В кн.: Современные методы проектирования систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1957.

Чернецкий В. И Анализ точности нелинейных систем управления. М., «Машиностроение», 1968.

Scheidegger A. E., Langbein W. B. Probability consepts in Geomorphology.— Geol. Surv. Profess. Paper. N 500-C, 1966.

Казахский научно-исследовательский институт энергетики

Поступила в редакцию 6.IV.1970

ON THE USE OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS IN GEOMORPHOLOGY

I. V. BUSALAEV

Summary

Considered are the principles of using stochastic equations in geomorphological investigations. A mathematical model of denudation of an interfluve is presented, which makes it possible to reveal the elements of evolution of hypsometric curve of the basin in the process of its geological development. The hypothesis of V. G. Glushkov has been taken as a basis. It says that the intensity of erosion is in proportion with a total energy of runoff from the surface of a basin.