

МЕТОДИКА НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 551.4 : 519.24(571.15)

Л. Н. ЦВЕТКОВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИЕМОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ДЛЯ АНАЛИЗА ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСЧЛЕНЕНИЯ РЕЛЬЕФА

(на примере Алтайского края)

Способ спрямленных диаграмм применен автором для выявления нормального характера распределения относительных высот рельефа Алтайского края и для определения среднего значения и среднего квадратического отклонения того же морфометрического показателя. Дается оценка предлагаемого графического приемз. Проводится анализ распределения относительных высот, исследуются изменения средних значений, средних квадратических отклонений, асимметрии и эксцесса относительных высот для территории Алтайского края.

Вопросам использования объективных математических критериев для оценки рельефа в разнообразных научных и практических целях в последние годы уделяется большое внимание (Т. В. Звонкова, 1970; Е. М. Николаевская, 1970; Р. Х. Пириев, 1969; О. А. Борсук, Ю. Г. Симонов, 1968, и др.). Наиболее часто при оценке рельефа учитываются морфометрические показатели, дающие представление о крутизне склонов, глубине и густоте расчленения. Эта информация получается картометрическим путем либо с топографических, либо с обзорно-топографических карт или выбирается непосредственно по специальным морфометрическим картам.

В настоящее время морфометрические карты, отражающие крутизну склонов, глубину и густоту расчленения рельефа, становятся неотъемлемой частью советских комплексных региональных атласов. В этих атласах на картах крутизны склонов принято отображать фактические преобладающие в рельефе данного района углы наклона (α) в градусах. Они определяются по величине заложения (l) по картам с горизонталями. Глубина расчленения (h) характеризует максимальное превышение внутри элементарного речного бассейна и вычисляется как разность максимальной ($H_{\max}$) и минимальной ($H_{\min}$) абсолютных высот в пределах этого бассейна. Густота расчленения (a) отражает среднее расстояние между соседними понижениями рельефа и вычисляется по формуле:

$$a = \frac{P}{L}, \quad [1]$$

где P — площадь элементарного речного бассейна, км^2 , L — длина эрозионной сети, км^1 .

¹ Вопросы методики составления морфометрических карт в атласах рассматриваются Е. М. Николаевской в работе: Морфометрические карты рельефа (Методические указания по проектированию и составлению комплексных научно-справочных атласов), вып. 4. МГУ, Геогр. фак., 1966 (ротапринт).

При составлении морфометрических карт накапливается обширная информация, целенаправленная обработка которой методами математической статистики позволяет получить дополнительно весьма ценные количественные характеристики рельефа, которые могли бы служить математическим обоснованием его региональных и типологических особенностей. К их числу следует отнести такие статистики, как среднее значение ($\bar{x}$) каждого из морфометрических показателей (α , h , a), среднее квадратическое отклонение (σ) и характер кривой распределения рассматриваемого морфометрического показателя. Они могут быть использованы для более обоснованного геоморфологического районирования территории. Не исключена возможность применения их и в других специальных областях, связанных с оценкой рельефа.

Однако данная статья имеет главным образом методическое значение. В ней освещаются некоторые методические вопросы, связанные с исследованием характера статистических показателей, изменение которых исследуется по гипсометрическим уровням для территории Алтайского края.

Первоначально были намечены следующие гипсометрические уровни (m): 0—200, 200—500, 500—1000, 1000—1500, 1500—2000, 2000—2500 и более 2500. Для них были вычислены среднее значение и среднее квадратическое отклонение относительных высот. Оказалось, что наиболее значительны изменения этих показателей (в несколько раз) на высотах до 1000 м. Выше 1000 м показатели меняются от уровня к уровню в пределах 15%. Поэтому окончательно было принято деление на пять гипсометрических уровней (0—200, 200—500, 500—1000, 1000—2500 и выше 2500 м), тем более что эти уровни хорошо увязываются с крупными орографическими элементами рельефа.

Два гипсометрических уровня приходятся на равнинную и предгорную части и три — на горную часть. Низменная часть (0—200 м) включает Кулундинскую низменность, области дельт, днищ и террас ложбин древнего стока. К возвышенным равнинам и предгорьям (200—500 м) относятся Приобское плато, Бийско-Чумышская возвышенность, предгорные равнины Северо-Западного и Западного Алтая, Северо-Алтайская подгорная и террасовые равнины, мелкосопочные предгорья Западного Алтая, увалисто-сопочные предгорья и холмисто-увалистые предгорья Северо-Восточного Алтая. Горная часть Алтайского края подразделяется на горы низкие (500—1000 м), средние (1000—2500 м) и высокие (выше 2500 м).

Для каждого гипсометрического уровня было получено графическим и аналитическим способом среднее значение относительных высот ($\bar{h}$), среднее квадратическое отклонение ($\bar{\sigma}$), а также определен характер кривых распределения относительных высот.

Поскольку графический способ определения показателей отличается простотой, то вначале рассмотрим один из его приемов — способ спрямленных диаграмм, позволяющий получить приближенные величины среднего значения и среднего квадратического отклонения, а также определить, подчиняется ли рассматриваемое распределение нормальному закону.

Применение способа спрямленных диаграмм разберем на примере ряда распределения относительных высот для пятого уровня — высоких гор (выше 2500 м).

Этот способ предусматривает несколько этапов обработки наблюдений². Первый этап включает группировку всех наблюдений в разряды. Число разрядов обычно рекомендуется принимать равным 12 (допускаются отклонения на 2—3 единицы в сторону увеличения или умень-

² Под наблюдением понимаются значения относительных высот, которые для каждого гипсометрического уровня выбираются с карты глубины расчленения рельефа.

шения). Мы примем число разрядов равным 13. Примерная величина разряда (C') получается от деления разности экстремальных значений относительных высот на число разрядов. В нашем случае это будет:

$$C' = \frac{1920 - 110}{13} \approx 140 \text{ м.}$$

Окончательно за величину разряда C примем ближайшее к C' удобное для вычислений число — 150.

Далее составляем расчетную таблицу (1), в первой колонке которой выписываются значения относительных высот (h_i), принятые для обозначения середин разрядов, во второй — соответствующие разрядам частоты (n_i), в третьей — накопленные частоты, в четвертой — значения эмпирической функции $F^*_{(h)}$, равные частному от деления накопленных частот на объем всего ряда (n), в пятой — та же величина, выраженная в процентах, в шестой колонке выписывают из таблиц соответствующие эмпирической функции квантили³.

Т а б л и ц а 1

h_i	n_i	$n_{\text{накопл.}}$	$F^*_{(h)} = \frac{n_{\text{накопл.}}}{n}$	$F^*_{(h)}, \%$	Квантили
75	5	5	0,0135	1,4	-2,197
225	8	13	0,0351	3,5	-1,812
375	13	26	0,0703	7,0	-1,476
525	42	68	0,1838	18,4	-0,900
675	70	138	0,3729	37,3	-0,324
825	86	224	0,6054	60,5	+0,266
975	69	293	0,7919	79,2	+0,813
1125	40	333	0,9000	90,0	+1,282
1275	17	350	0,9459	94,6	+1,607
1425	15	365	0,9865	98,6	+2,197
1575	2	367	0,9919	99,2	+2,409
1725	2	369	0,9973	99,7	+2,748
1875	1	370	1,0000	100,0	+3,110

Табличные данные легко представить в виде графика (рис. 1), на горизонтальной оси которого откладываются значения изучаемого признака (h), а по вертикальной — квантили, соответствующие эмпирической функции $F^*_{(h)}$. Если точки графика ложатся вдоль прямой линии, как это имеет место в рассматриваемом случае, то можно утверждать, что распределение изучаемой величины подчиняется нормальному закону.

С помощью графика можно получить приближенные величины среднего значения ($\bar{h}$) и среднего квадратического отклонения ($\bar{\sigma}$). Абсцисса точки пересечения построенной прямой с горизонтальной осью графика дает приближенное значение выборочной средней (на графике $h_I = 775 \text{ м}$). Определяем среднее квадратическое отклонение: из точки со значением $F^*_{(h)}$, соответствующим квантилю, равному 1, и $h=0$, проведем прямую, параллельную оси h , до пересечения с построенной прямой графика и из точки пересечения опустим перпендикуляр на ось h . Точку пересечения обозначим h_{II} ($h_{II} = 1100 \text{ м}$). Разность абсцисс ($h_{II} - h_I$) дает величину среднего квадратического отклонения ($\bar{\sigma}_{гр} = 325 \text{ м}$).

Графический способ определения среднего значения и среднего квадратического отклонения весьма прост и может быть рекомендован для предварительных расчетов ($\bar{x}$, σ) и для исследований, не требующих высокой точности определения этих показателей. (Относительная ошибка графического метода по сравнению с аналитическим составляет 5—12%). Для строгих выводов применяются аналитические приемы обработки статистического материала.

³ Я н к о Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатиздат, 1961.

Вычисление с помощью 1-го и 2-го условных начальных моментов методом сумм⁴ дает для этого ряда среднее значение относительных высот 841 м и среднее квадратическое отклонение 291 м.

Таким образом, расхождение с графически полученными значениями составляет примерно 8% для среднего значения и примерно 12% для среднего квадратического отклонения.

Что касается типа распределения, то с помощью графического приема было установлено, что распределение данного ряда подчиняется нормальному закону. Проверка «нормальности» распределения с помощью критерия согласия Пирсона также дает положительный результат.

Но при этом следует иметь в виду, что в силу ограниченного объема выборки, деления ряда распределения на разряды и других причин можно допустить ошибки двоякого рода. Ошибка первого рода заключается в том, что будет отвергнута верная гипотеза, при ошибке второго рода в качестве правильной может быть принята ложная гипотеза.

Чтобы избежать этих ошибок, допущение о нормальном характере распределения должно быть подтверждено каким-либо другим способом. Например, на основании наблюдаемых данных можно вычислить еще две статистики: асимметрию (a_s)—мера косости и эксцесс (e_k)—мера крутости, которые в строго нормальном распределении равны 0. В нашем примере $a_s = 0,095$; $e_k = 0,591$.

Мы видим, что и асимметрия, и эксцесс несколько больше 0. Допустимо ли это для нормального распределения? Распределение можно считать нормальным, если значения асимметрии и эксцесса лежат в пределах своих двойных основных ошибок. Вообще говоря, все вычисленные статистики должны быть оценены с тем, чтобы на основании частичной совокупности можно было сделать надежные выводы об объективных свойствах явлений, выражаемых полно лишь общей совокупностью. В случае частичных совокупностей достаточно большого объема (в нашем примере $n = 370$) применяются основные ошибки статистик. Основная ошибка статистики указывает на те границы, внутри которых с вероятностью 0,683 находится неизвестное значение параметра общей совокупности.

Основные ошибки статистик данного распределения: среднего значения $\varepsilon_{\bar{h}} \approx 15$ м, основного отклонения $\varepsilon_{\sigma} \approx 11$ м, асимметрии $\varepsilon_{e_k} \approx 0,9$, эксцесса $\varepsilon_{e_k} \approx 1,8$.

Отсюда следует, что асимметрия (a_s) и эксцесс (e_k) лежат в пределах своих двойных основных ошибок и, следовательно, распределение данного ряда окончательно можно считать нормальным. Значения статистик и их основных ошибок для относительных высот по гипсометрическим ступеням Алтайского края сведены в табл. 2.

⁴ Подробно с терминами математической статистики можно ознакомиться в руководствах по математической статистике (Митропольский А. К., Гмурман В. Е. и др.). В тех же руководствах можно найти таблицы, необходимые для дальнейших вычислений.

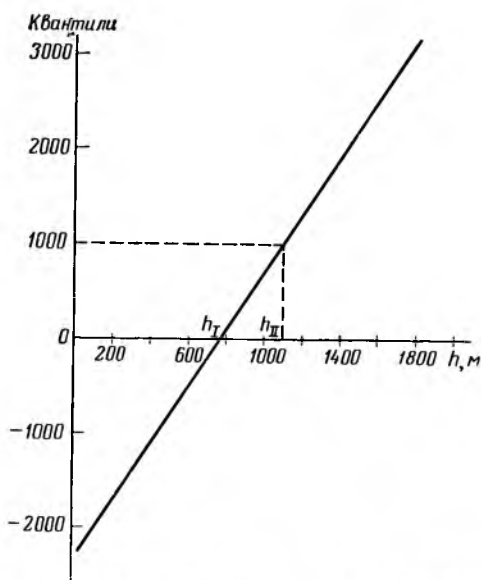


Рис. 1. Способ спрямленных диаграмм

Гипсометрические уровни (абсолютные высоты, м)	Среднее значение относительных высот с основной ошибкой (м)	Среднее квадратическое отклонение с основной ошибкой (м)	Значение асимметрии с основной ошибкой	Значение эксцесса с основной ошибкой	Показатель точности исследования (%)	Относительная ошибка графического определения (%)
0—200	31,65±1,338	21,424±0,945	0,881±0,289	0,568±0,578	4,2	—
200—500	92,15±1,747	43,946±1,235	0,738±0,263	0,502±0,526	1,9	—
500—1000	349,55±6,664	99,234±4,710	0,590±0,669	0,446±1,338	1,9	6,1 12,9
1000—2500	704,40±10,156	259,331±7,181	0,384±0,631	0,553±1,262	1,4	7,7 11,8
Выше 2500	840,75±15,152	291,440±10,713	0,095±0,887	0,591±1,774	1,8	7,2 9,8

Из таблицы видно, что с увеличением абсолютных высот среднее значение относительных высот постепенно возрастает, причем наиболее резкое возрастание (примерно в 4 раза по сравнению с предыдущим) наблюдается при переходе от второго к третьему гипсометрическому уровню. Начиная с 1000 м, нарастание средних значений относительных высот продолжается, но значительно меньшими темпами, так что при переходе от четвертого гипсометрического уровня к пятому увеличение средней относительной высоты составляет лишь 20%. Следовательно, рельеф двух последних высотных уровней по морфометрическому признаку (h) более однороден, чем рельеф остальных уровней.

Среднее квадратическое отклонение с возрастанием абсолютных высот постепенно увеличивается, но это увеличение происходит равномернее. Резкий скачок в возрастании среднего квадратического отклонения относительных высот наблюдается при переходе от третьего к четвертому гипсометрическому уровню (в 2,5 раза). А при переходе от четвертого к пятому гипсометрическому уровню наблюдается совсем незначительное увеличение среднего квадратического отклонения относительных высот (примерно 1%).

Характер изменения средних значений и средних квадратических отклонений относительных высот по гипсометрическим уровням показывает, что наиболее резко отличны друг от друга первые четыре гипсометрических уровня, т. е. территории с абсолютными высотами до 1000 м. Значительно меньше различия в морфометрическом отношении (по h) между четвертым и пятым уровнями, т. е. для территорий выше 1000 м.

Асимметрия (a_s) в отличие от предыдущих показателей ($\bar{h}$, σ) с увеличением абсолютных высот постепенно уменьшается, достигая наименьшего значения на последнем гипсометрическом уровне. Значение же эксцесса (e_h) на всех ступенях остается примерно одинаковым.

Для каждого гипсометрического уровня помимо статистик были получены эмпирические и теоретические кривые распределения относительных высот (рис. 2, а—е). Проверка с помощью критерия согласия Пирсона показала хорошее согласие этих кривых.

Совместный анализ кривых распределения и двух статистик (a_s и e_h) показывает, что на территории Алтайского края относительные высоты (при абсолютных высотах до 500 м) подчиняются распределению типа А, которое является обобщением нормального закона распределения. С увеличением же абсолютных высот (выше 500 м) распределение относительных высот начинает подчиняться нормальному закону.

Найденная эмпирическим путем закономерность подтверждается и теоретически. Распределение типа А может быть записано в виде уравнения:

$$f_A(x) = f(x) - \frac{r_3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{r_4 - 3}{24} f^{(4)}(x), \quad [2]$$

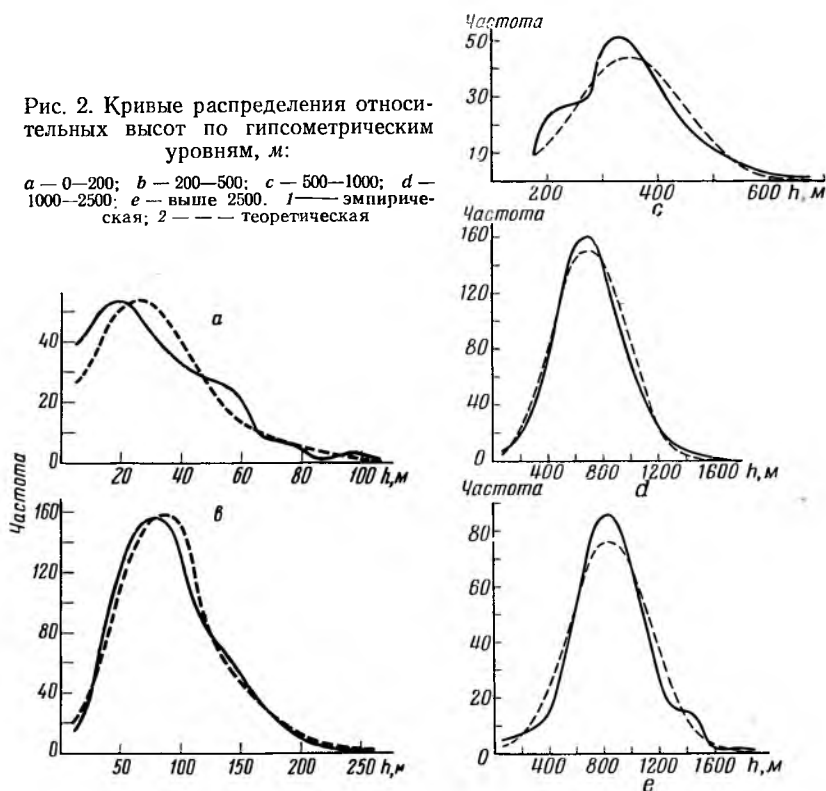
в котором $f^{(3)}(x)$ и $f^{(4)}(x)$ — суть производные от нормальной функции плотности $f(x)$. Но то же уравнение можно записать в следующем виде:

$$f_A(h) = f(h) - \frac{a_s}{6} f^{(3)}(h) + \frac{e_k}{24} f^{(4)}(h). \quad [3]$$

Здесь ясно видно, что в правой части уравнения первый член дает нормальное распределение, второй отражает влияние асимметрии, третий — влияние эксцесса (крутости) распределения типа А. Поэтому, если третий член этого уравнения остается примерно на одном уровне, а второй постепенно значительно уменьшается, естественно ожидать, что возрастает роль первого члена уравнения, т. е. распределение типа А при указанных условиях может перейти в нормальное.

Рис. 2. Кривые распределения относительных высот по гипсометрическим уровням, м:

a — 0—200; b — 200—500; c — 500—1000; d — 1000—2500; e — выше 2500. 1 — эмпирическая; 2 — теоретическая



Кривая распределения (типа А) относительных высот, свойственная абсолютным высотам до 500 м, свидетельствует о том, что в этом случае в формировании относительных высот из многочисленных случайных факторов главенствующая роль принадлежит лишь одному или нескольким факторам, которые и определяют направленность изучаемого явления.

Нормальное распределение относительных высот для абсолютных высот более 500 м свидетельствует о равномерном воздействии всех случайных факторов, формирующих относительные высоты указанных территорий.

Выводы

1. Морфометрическая характеристика рельефа может быть углублена при помощи таких статистик, как среднее значение, среднее квадратическое отклонение, асимметрия и эксцесс количественных показателей расчленения земной поверхности, а также с помощью выявления характера распределения количественного показателя расчленения.

2. Вычисление двух первых статистик ($\bar{x}$, σ) в случае нормального распределения можно проводить графическим и аналитическим путем, причем графический, более простой и быстрый в исполнении, предпочтительнее для ориентировочных и других работ, не требующих высокой точности.

3. Совместный анализ средних значений относительных высот и средних квадратических отклонений по гипсометрическим уровням показывает, что более существенны отличия средних значений относительных высот на абсолютных высотах до 1000 м, а выше 1000 м эти отличия меньше.

4. Характер распределения относительных высот не остается постоянным. Для территорий, лежащих ниже 500 м, свойственно распределение типа А, а для расположенных выше 500 м — нормальное распределение относительных высот, что свидетельствует о том, что на разных уровнях главенствующая роль в формировании рельефа принадлежит либо одному или нескольким случайным факторам, либо равномерному воздействию всех случайных факторов.

ЛИТЕРАТУРА

- Борсук О. А., Симонов Ю. Г. Анализ кривых распределения в геоморфологии.— Вестн. научн. информации Забайкальск. фил. геогр. о-ва СССР, 1968, № 9.
- Занин Г. В. Геоморфология Алтайского края (без Горно-Алтайской АО).— В кн.: Природное районирование Алтайского края. Труды особой комплексной экспедиции по землям нового сельскохозяйственного освоения, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958.
- Звонкова Т. В. Прикладная геоморфология. М., 1970.
- Митропольский А. К. Элементы математической статистики. Л., 1969.
- Николаевская Е. М. Количественная оценка рельефа на картах прикладного районирования.— В кн.: Мелкомасштабные карты оценки природных условий. М., Изд-во МГУ, 1970.
- Пирьев Р. Х. Характеристика углов наклона поверхности территории Азербайджана. Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. геол.-геогр. н., 1968, № 4.

Географический ф-т
МГУ

Поступила в редакцию
7.VI.71

THE USE OF A MATHEMATICAL STATISTICS METHOD FOR ANALYSING THE VERTICAL DISJUNCTION OF THE RELIEF (ILLUSTRATED BY ALTAI REGION)

L. N. TSVETKOVA

Summary

A method of diagrams (rectified ones) has been used for defining a regular character of distribution of the relative altitudes of the Altai relief and for determining the mean value and the mean quadratic deviation of the same morphometric index. Presented is an analysis of the suggested method of diagrams and that of the distribution of the relative altitudes, as well as results of studying changes of the mean values and those of the mean quadratic deviations, asymmetry and excess of the relative altitudes for the territory of the Altai Region.
